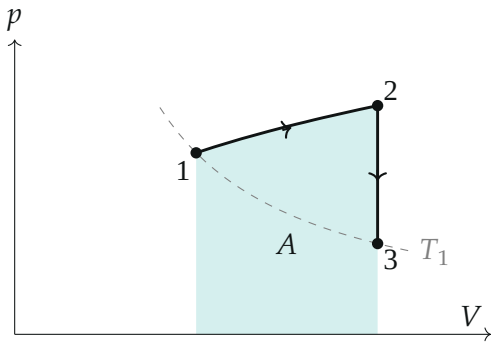
Газ с постоянной теплоёмкостью

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 2] «Газ с постоянной теплоёмкостью».

При расширении идеального одноатомного газа в некотором процессе его теплоёмкость не меняется. При этом газ нагревается и совершает работу A. Известно, что для изохорического охлаждения газа до первоначальной температуры у него нужно забрать количество теплоты $Q = 2A$. Найти молярную теплоёмкость газа в первом процессе.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на первый закон термодинамики и теплоёмкость. Молярная теплоёмкость процесса — это теплота, полученная одним молем, делённая на изменение температуры: $C = \dfrac{Q_1}{\nu \Delta T}$. Раз она постоянна, достаточно знать полные Q_1 и ΔT за процесс. Изохорическое охлаждение до начальной температуры — это «измеритель» изменения внутренней энергии: на изохоре работы нет, вся отобранная теплота равна убыли внутренней энергии, а она та же, что прирост в первом процессе, потому что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры.

Обозначения. 1 — начальное состояние, 2 — конец расширения, 3 — конец изохорического охлаждения ($T_3 = T_1$); Q_1 — теплота, полученная газом в процессе 1-2; $\Delta U = U_2 - U_1$; $\Delta T = T_2 - T_1$; ν — число молей.

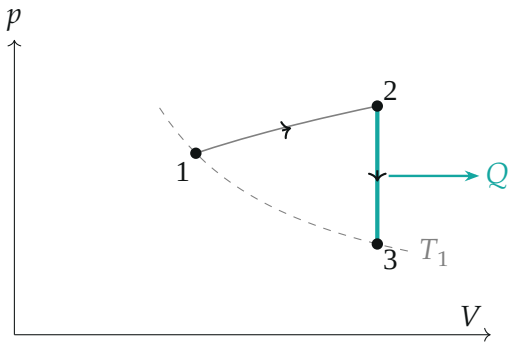


Поясняющий рисунок: расширение 1-2 с постоянной теплоёмкостью (работа A — закрашенная площадь), изохорическое охлаждение 2-3 до изотермы

T_1 (пунктир). Форма кривой 1-2 — по найденной ниже теплоёмкости

1. Изохора 2-3: изменение внутренней энергии. Первый закон термодинамики для изохоры: $Q_{23} = \Delta U_{23} + 0$. Газ отдаёт теплоту Q, то есть $Q_{23} = -Q$, и $U_3 - U_2 = -Q$. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, а $T_3 = T_1$, поэтому $U_3 = U_1$:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q = 2A.$$

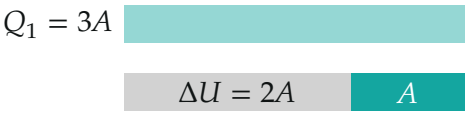


Изохора 2-3: работы нет, газ отдаёт теплоту Q, и его внутренняя энергия возвращается к U_1 — точка 3 на изотерме T_1

2. Процесс 1-2: полученная теплота. Первый закон термодинамики:

$$Q_1 = \Delta U + A = 2A + A = 3A.$$

Обе величины положительны: газ нагревается ($\Delta U > 0$) и расширяется ($A > 0$), значит, получает теплоту.



Баланс энергии в процессе 1-2 (длины полос пропорциональны): из полученной теплоты $3A$ две трети идёт на нагрев, треть — на работу

3. Изменение температуры. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T \quad \Longrightarrow \quad \nu\Delta T = \frac{2\Delta U}{3R} = \frac{4A}{3R}.$$

4. Молярная теплоёмкость. Теплоёмкость постоянна, поэтому равна отношению полных величин:

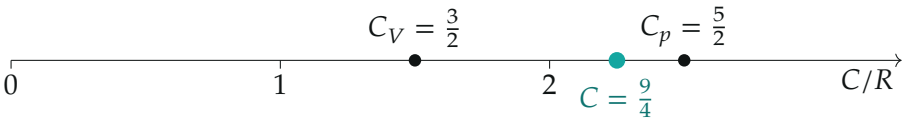
$$C = \frac{Q_1}{\nu\Delta T} = \frac{3A}{4A/(3R)} = \frac{9}{4}R.$$

Обратите внимание. Отобранная на изохоре теплота Q — не теплота процесса 1-2. Она лишь говорит, на сколько выросла внутренняя энергия: на изохоре газ не совершает работы. Подставлять Q вместо Q_1 в определение теплоёмкости — значит получить $C_V = \frac{3}{2}R$, теплоёмкость изохоры.

Проверка. Второй способ — через долю работы. Для процесса с постоянной теплоёмкостью C (политропа) на каждом малом шаге $C\,\nu\,dT = C_V\nu\,dT + \delta A$, поэтому $A = (C - C_V)\nu\Delta T$ и $\frac{A}{\Delta U} = \frac{C - C_V}{C_V}$. По условию $\frac{A}{\Delta U} = \frac{A}{2A} = \frac{1}{2}$:

$$C = C_V\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}R \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}R$$

— то же. Значение лежит между $C_V = 1{,}5R$ и $C_p = 2{,}5R$: в процессе 1-2 давление растёт вместе с объёмом (показатель политропы $n = -\frac{1}{3}$, $p \propto V^{1/3}$ — так построена кривая 1-2). Размерность: как у R, Дж/(моль·К).



Найденная теплоёмкость $\frac{9}{4}R$ между изохорной C_V и изобарной C_p

Смысл: из каждой порции полученной теплоты треть уходит в работу, и поэтому на нагрев на один кельвин нужно в $\frac{3}{2}$ раза больше теплоты, чем при постоянном объёме.

Ответ. $C = \frac{9}{4}R$.