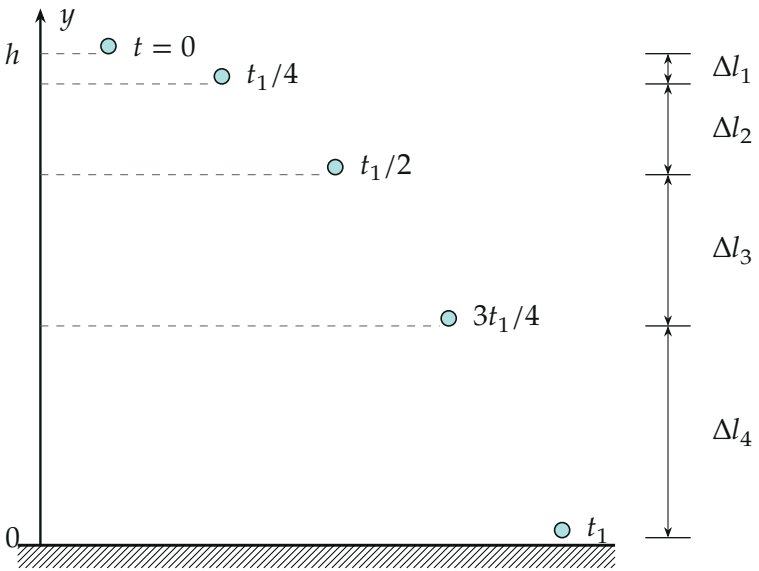
Вторая четверть падения

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 3] Тело падает на землю с высоты h без начальной скорости. Какое расстояние пройдёт тело за вторую четверть времени падения до поверхности земли? Силой сопротивления воздуха пренебречь.



Поясняющий рисунок. Положения тела в моменты 0, $t_1/4$, $t_1/2$, $3t_1/4$, t_1 *(тело показано в разных местах по ширине, чтобы не накладывать точки), высоты — по формуле* $y = h(1-(t/t_1)^2)$*; справа — пути* $\Delta l_1, \dots, \Delta l_4$ *за четыре четверти времени падения*

▲ **Решение. Что происходит.** Тело падает из состояния покоя с постоянным ускорением g. Скорость растёт, поэтому за равные промежутки времени тело проходит всё большие расстояния, и «вторая четверть времени» — вовсе не вторая четверть высоты. Главная идея: записать закон движения, найти полное время падения t_1, а потом взять разность путей, пройденных от старта до концов второй четверти времени. Класс задачи — путь за заданную долю времени при равноускоренном движении из покоя.

Обозначения. Ось y направим вертикально вверх, начало отсчёта — на поверхности земли: тогда начальная координата тела равна h, а в момент падения координата равна нулю. t_1 — полное время падения; $l(t) = h - y(t)$ — путь, пройденный от начала падения (тело движется в одну сторону, поэтому путь равен смещению); Δl_k — путь за k-ю четверть времени t_1.

1. Закон движения. Ускорение g направлено вниз, начальная скорость равна нулю, поэтому

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}, \qquad l(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

2. Время падения. В момент падения $y(t_1) = 0$:

$$\frac{gt_1^2}{2} = h \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad gt_1^2 = 2h.$$

Удобно выразить путь через долю пройденного времени: подставим $g = 2h/t_1^2$ в $l(t)$:

$$l(t) = h\left(\frac{t}{t_1}\right)^2.$$

Так в ответе не останется ни g, ни t_1, а только h.

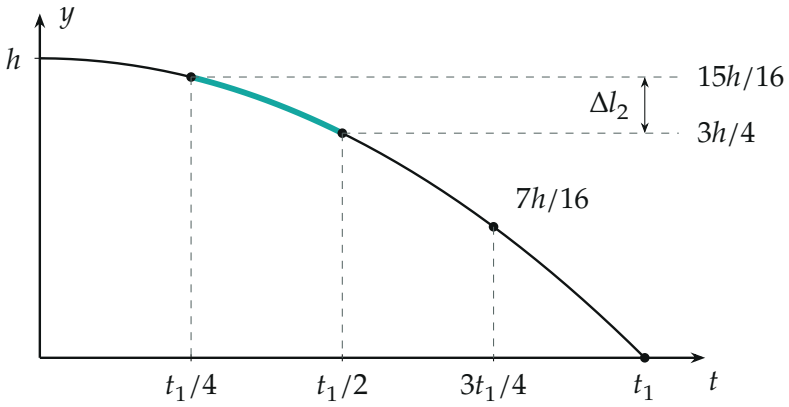


График $y(t)$; выделена вторая четверть времени, путь за неё — Δl_2

3. Пути от старта до концов четвертей. Подставим доли времени $1/4$, $1/2$, $3/4$ и 1:

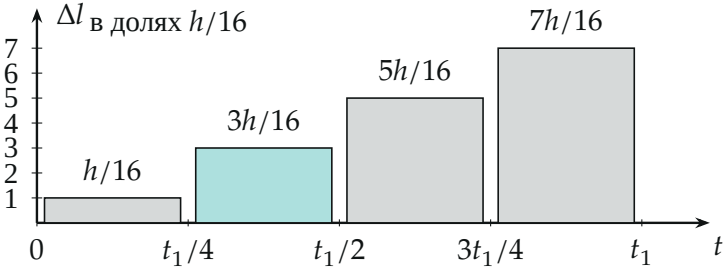
$$l_1 = \frac{h}{16}, \qquad l_2 = \frac{h}{4}, \qquad l_3 = \frac{9h}{16}, \qquad l_4 = h.$$

Здесь l_k — путь от старта до конца k-й четверти; последнее значение равно h, как и должно быть. Проверим по координате: $y(t_1/4) = h - h/16 = 15h/16$, $y(t_1/2) = 3h/4$ — именно эти уровни и показаны на графике.

4. Путь за вторую четверть. Это разность путей от старта до конца второй и до конца первой четверти:

$$\Delta l_2 = l_2 - l_1 = \frac{h}{4} - \frac{h}{16} = \frac{3}{16}h.$$

Тот же способ для остальных четвертей даёт $\Delta l_1 = \frac{1}{16}h$, $\Delta l_3 = \frac{5}{16}h$, $\Delta l_4 = \frac{7}{16}h$: пути относятся как $1 : 3 : 5 : 7$.



Пути за четыре четверти времени. Высота столбика — путь в долях $h/16$: 1, 3, 5, 7; сумма 16 долей равна h. Выделена вторая четверть

Второй способ — средняя скорость. Скорость $v = gt$ растёт со временем линейно, поэтому на любом промежутке средняя скорость равна полусумме скоростей на его концах. Скорости в моменты $t_1/4$ и $t_1/2$

равны $\frac{gt_1}{4}$ и $\frac{gt_1}{2}$, поэтому

$$\Delta l_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{gt_1}{4} + \frac{gt_1}{2}\right)\frac{t_1}{4} = \frac{3gt_1^2}{32} = \frac{3\cdot 2h}{32} = \frac{3}{16}h.$$

На графике $v(t)$ этот путь — площадь трапеции под линией скорости на втором промежутке времени.

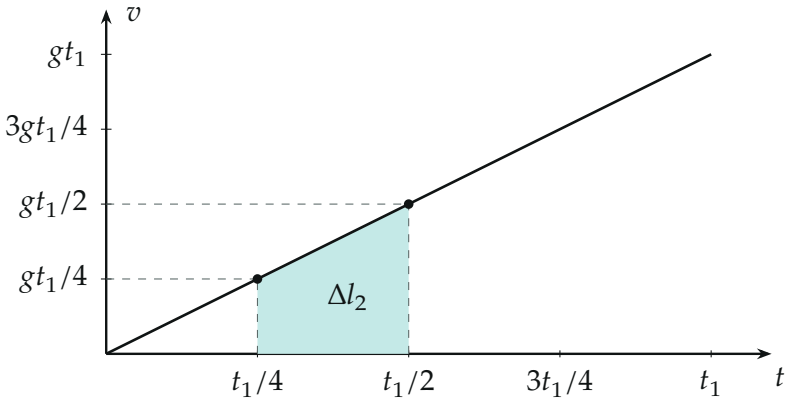


График $v(t) = gt$. Площадь закрашенной трапеции — путь Δl_2 за вторую четверть времени

Обратите внимание. Четверть времени падения и четверть пройденной высоты — разные вещи. За первую четверть времени тело проходит всего $h/16$, а четверть высоты ($h/4$) оно пролетит уже за половину времени падения.

Проверка. Размерность: Δl_2 — доля h, то есть длина. Сумма путей по четвертям $\frac{1+3+5+7}{16}h = h$, как и должно быть. Величина $\Delta l_2 = \frac{3}{16}h \approx 0{,}19\,h$ лежит между $\Delta l_1 = h/16$ и $\Delta l_3 = 5h/16$: скорость растёт, значит, путь за каждый следующий равный промежуток больше. Смысл: путь за равные последовательные промежутки при равноускоренном движении из покоя относится как последовательные нечётные числа.

Ответ. $\Delta l_2 = \frac{3}{16}h.$