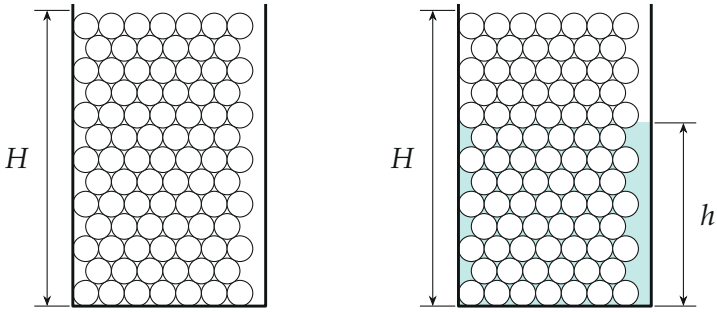
Стакан с пенопластовыми шариками

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Вес цилиндрического стакана объёмом V равен P_1. В стакан доверху насыпали одинаковые маленькие пенопластовые шарики и стали наливать некоторую жидкость, пока шарики не начали всплывать. В этот момент вес стакана (с жидкостью и шариками) стал равен P_2. Найти плотность пенопласта.



Поясняющий рисунок. (а) Стакан высотой H, насыпанный шариками доверху. (б) Жидкость налита до высоты h; шарики в нижней части насыпки погружены, верхние выступают над уровнем

▲ **Решение. Что происходит.** Жидкость поднимается и выталкивает шарики вверх. В момент начала всплытия сила Архимеда, действующая на погружённую часть насыпки, равна весу всех шариков: ещё мгновение назад они не всплывали, ещё мгновение спустя всплывут. Плотность жидкости нам не дана, значит, в ответ она не войдёт. Главная идея: вес добавленного в стакан ($P_2 - P_1$) выражается через высоту уровня h, а условие всплытия связывает h с плотностью пенопласта. Класс задачи — условие плавания тела, часть которого погружена, плюс однородная насыпка из мелких шариков.

Обозначения. S — площадь сечения стакана, H — его высота и высота насыпки, $V = SH$. h — высота уровня жидкости в момент начала всплытия, ρ_0 — плотность жидкости, ρ — плотность пенопласта. Шарики одинаковые и мелкие, поэтому они заполняют любую часть стакана

одинаково: доля объёма, занятая шариками, одна и та же на всех высотах; обозначим её φ (для шаров она меньше единицы). Тогда объём всех шариков $V_{ш} = \varphi SH$, объём погружённых шариков $V_{под} = \varphi Sh$, а жидкость занимает остальное в нижней части стакана: $(1 - \varphi)Sh$.

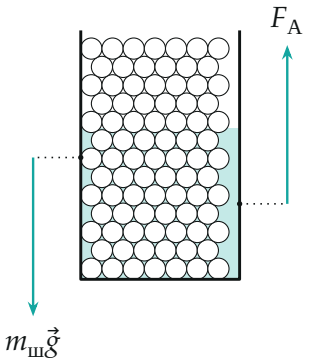
1. Вес добавленного. Вес стакана с содержимым складывается из веса пустого стакана, шариков и жидкости:

$$P_2 = P_1 + P_{ш} + P_{ж}, \qquad P_{ш} = \rho g \varphi SH, \qquad P_{ж} = \rho_0 g(1 - \varphi)Sh.$$

2. Условие начала всплытия. Рассмотрим все шарики как одно тело. Сила Архимеда действует только на погружённую часть: $F_A = \rho_0 g V_{под} = \rho_0 g \varphi Sh$. В момент начала всплытия она равна весу всех шариков — шарики уже не давят на дно, но ещё не поднимаются (трением о стенки пренебрегаем):

$$\rho_0 g \varphi Sh = \rho g \varphi SH \quad \Rightarrow \quad \rho_0 h = \rho H.$$

Доля φ сократилась, поэтому её значение знать не нужно. Из этого равенства видно, что $h \le H$ при $\rho \le \rho_0$: чем легче пенопласт, тем ниже нужен уровень.



Силы на все шарики как на одно тело: сила Архимеда — в центре погружённой части (высота $h/2$), вес — в центре насыпки ($H/2$); $F_A = m_ш g$

Обратите внимание: архимедова сила считается по объёму погружённой части $V_{под}$, а не по объёму всех шариков: верхние шарики выступа-

ют над жидкостью. Именно поэтому в условии равновесия появляется отношение высот H/h.

3. Вес добавленного через уровень. Подставим в п. 1 связь $\rho H = \rho_0 h$ из п. 2: вес шариков $P_ш = \rho g \varphi SH = \rho_0 g \varphi Sh$. Тогда

$$P_ш + P_ж = \rho_0 g \varphi Sh + \rho_0 g (1-\varphi) Sh = \rho_0 g Sh, \qquad P_2 - P_1 = \rho_0 g Sh.$$

Вес жидкости и шариков вместе равен весу столба жидкости высотой h над дном — как будто шариков в стакане нет.

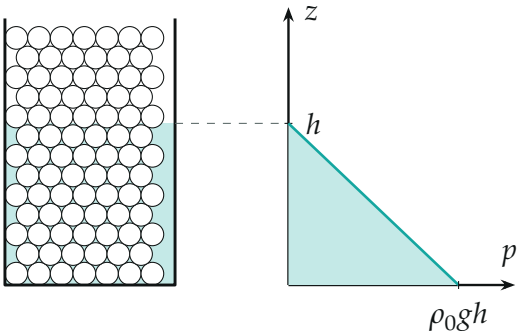
4. Ответ. Воспользуемся ещё раз связью $\rho_0 h = \rho H$ из п. 2:

$$P_2 - P_1 = \rho g SH = \rho g V \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{P_2 - P_1}{gV}.$$

Второй способ — давление на дно. Рассмотрим систему «жидкость + шарики». Внешние вертикальные силы на неё — тяжесть $P_ш + P_ж$ и реакция дна. В момент начала всплытия шарики на дно не давят, поэтому дно получает силу только от жидкости: давление у дна $p = \rho_0 g h$ (гидростатика), сила $pS = \rho_0 g h S$. По третьему закону Ньютона эта же сила — прибавка веса стакана:

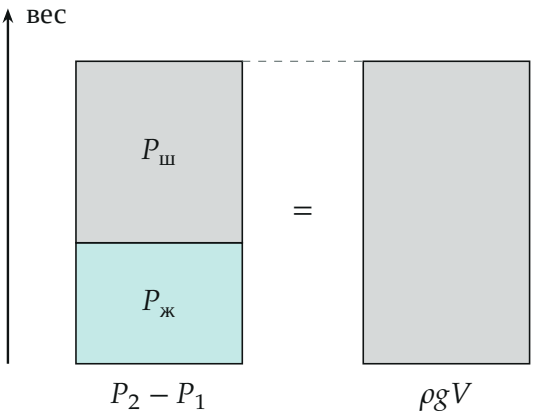
$$P_2 - P_1 = \rho_0 g h S,$$

что совпадает с п. 3 и не использует φ.



Давление в жидкости $p(z) = \rho_0 g (h - z)$; сила давления на дно $pS = P_2 - P_1$

Смысл ответа. Вес добавленного ($P_2 - P_1$) равен весу сплошного пенопластового цилиндра объёма V: $\rho g V$. Из него доля φ приходится на вес самих шариков, а доля $1 - \varphi$ — на вес жидкости в промежутках: из $\rho_0 h = \rho H$ следует $P_ж = \rho g (1-\varphi) SH$: жидкость в промежутках весит столько, сколько весил бы пенопласт в том же объёме.



Прибавка веса $P_2 - P_1$ складывается из веса жидкости $P_ж$ и шариков $P_ш$ и равна $\rho g V$. Для рисунка принято $\varphi = 0{,}6$: $P_ш = 0{,}6\,\rho g V$, $P_ж = 0{,}4\,\rho g V$

Проверка. Размерность: $\dfrac{P_2 - P_1}{gV}$ — ньютон на (м/с^2·м^3) = кг/м^3, плотность. Предел: если бы шарики всплыли сразу ($h = H$, то есть $\rho = \rho_0$), прибавка веса была бы равна весу жидкости в объёме V: $P_2 - P_1 = \rho_0 g V$ — совпадает с формулой при $\rho = \rho_0$. Результат не зависит ни от ρ_0, ни от φ, как и должно быть: в условии они не заданы.

Ответ. $\rho = \dfrac{P_2 - P_1}{gV}$.