# Сегмент заряженной сферы

**Задача 5.** [Росатом 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 5] От равномерно заряженной зарядом $Q$ сферы радиуса $R$ отрезали сегмент высотой $R/3$. Сегмент удерживают в том же положении, в каком он был, когда был частью сферы (см. рисунок). Какой минимальной силой нужно действовать для этого на сегмент?

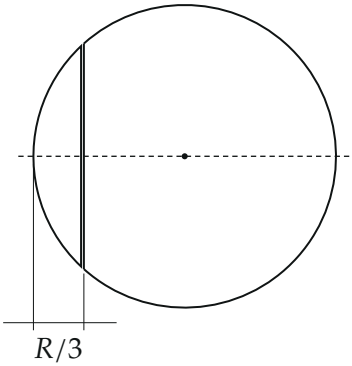



*Рисунок условия. Сегмент отрезан от сферы, но удерживается на месте. Высота сегмента $R/3$ (на рисунке выдержана по условию)*

▲ **Решение. Что происходит.** Одноимённые заряды сегмента и остальной сферы отталкиваются, сегмент стремится улететь наружу. Минимальная сила, которая его удержит, равна силе электрического отталкивания: сегмент в равновесии, и внешняя сила уравновешивает электрическую. Считать силу по закону Кулона для всех пар зарядов не хочется — получился бы громоздкий интеграл. Две идеи упрощают задачу. Первая: сила на малую площадку равна её заряду, умноженному на поле остальной сферы, а оно у поверхности вдвое меньше внешнего поля сферы. Вторая: все силы на площадки направлены по радиусам, а их проекции на ось сегмента складываются в произведение «давления» на площадь основания сегмента. Класс задачи — сила, действующая на заряженную поверхность.

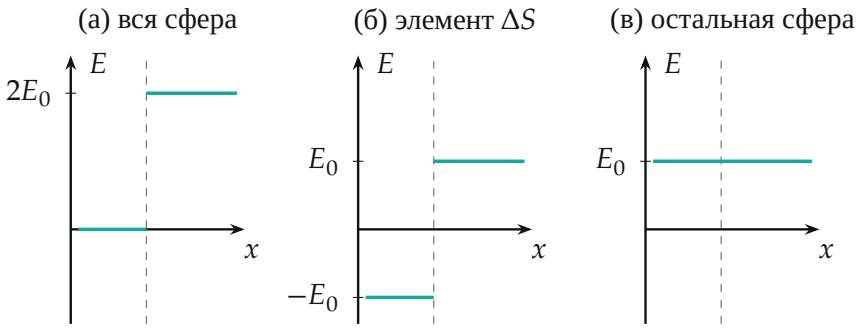
**Обозначения.** $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $h = R/3$ — высота сегмента; $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ — поверхностная плотность заряда. Ось сегмента — прямая, проходя-

щая через центр сферы $O$ и середину сегмента. $\Delta S$ — малая площадка сегмента, $\alpha$ — угол между радиусом, проведённым к ней, и осью, $\Delta Q = \sigma \Delta S$ — её заряд.

**1. Поле остальной сферы у поверхности.** По теореме Гаусса поле всей сферы снаружи $E = kQ/R^2$ (у самой поверхности), внутри нуль. Рассмотрим площадку $\Delta S$ и поле у неё: оно складывается из поля самой площадки $E_{\Delta S}$ и поля остальной сферы $E_{\text{ост}}$. Площадка мала, вблизи неё она выглядит как плоскость, а поле плоскости по обе стороны одинаково по модулю и противоположно по направлению: наружу $+E_{\Delta S}$, внутрь $-E_{\Delta S}$. Поле остальной сферы вблизи площадки одно и то же по обе стороны (на самой площадке нет скачка). Запишем сумму снаружи и внутри:

$$E_{\Delta S} + E_{\text{ост}} = \frac{kQ}{R^2}, \qquad -E_{\Delta S} + E_{\text{ост}} = 0.$$

Складывая, получаем $E_{\text{ост}} = \dfrac{kQ}{2R^2}$, то есть вдвое меньше поля сферы снаружи (и такое же, как поле самой площадки).



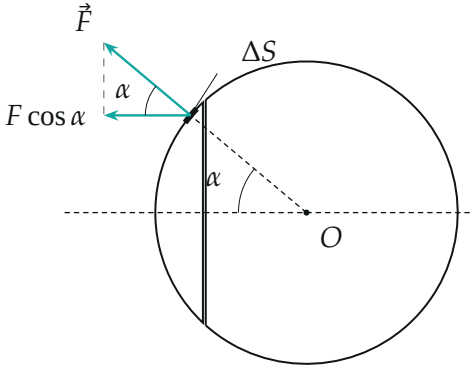

*Поля вблизи площадки по нормали ($x$ — расстояние от поверхности, наружу), $E_0 = kQ/(2R^2)$. Поле остальной сферы (в) — разность полей (а) и (б) — без скачка, равно $E_0$*

Обратите внимание: на площадку действует поле *остальной* сферы, а не всей: поле самой площадки на неё саму не действует, а «внешнее» поле $kQ/R^2$ вдвое больше нужного, оно включает поле самой площадки.

**2. Сила на малую площадку.** Сила — заряд площадки на поле остальной сферы, направлена по радиусу наружу:

$$\Delta F = \Delta Q\, E_{\text{ост}} = \frac{Q\,\Delta S}{4\pi R^2}\cdot\frac{kQ}{2R^2}, \qquad p \equiv \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{kQ^2}{8\pi R^4}.$$

Отношение $p$ одинаково для всех площадок сферы: «давление» электрического поля на заряженную поверхность.

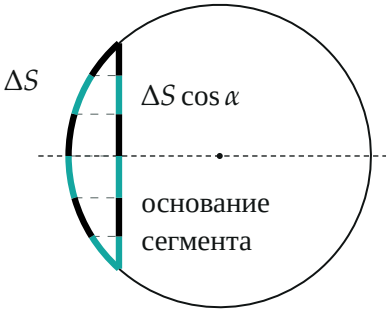



*Сила $\vec{F} = \Delta F$ на площадку $\Delta S$ направлена по радиусу $OP$, её проекция на ось сегмента — $F\cos\alpha$*

**3. Суммирование по сегменту.** Разобьём сегмент на малые площадки и сложим силы, действующие на них. Силы, с которыми площадки сегмента действуют друг на друга, попарно равны и противоположны (третий закон Ньютона) и в сумме дают нуль. Поэтому для каждой площадки можно взять силу $\Delta F$ из п. 2 — со стороны всей остальной сферы, включая другие площадки сегмента: сумма всё равно будет силой, с которой оставшаяся часть сферы действует на сегмент. Сумму векторов заменим суммой проекций на ось сегмента: перпендикулярные оси составляющие сокращаются по симметрии (сегмент симметричен относительно оси).

$$F = \sum \Delta F\cos\alpha = p\sum \Delta S\cos\alpha.$$

Произведение $\Delta S\cos\alpha$ — проекция площадки на плоскость основания сегмента (перпендикулярную оси). Проекции всех площадок покрывают основание ровно один раз, поэтому $\sum \Delta S\cos\alpha = S_{\text{осн}}$.




*Вид сбоку: полоски сегмента (поочерёдно цветные) и их проекции на основание — те же цвета на вертикальной линии. Проекции не перекрываются и заполняют основание целиком*

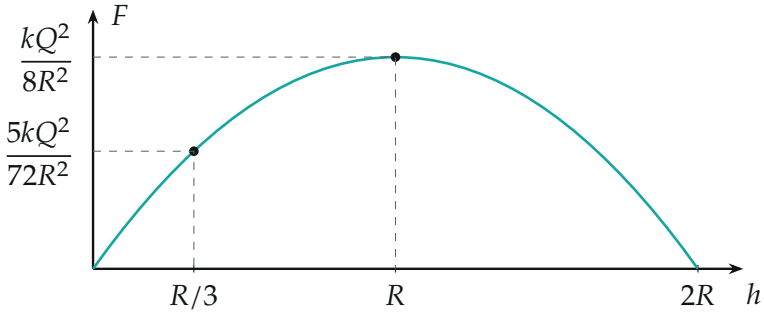
**4. Площадь основания.** Основание — круг радиуса $\rho$; по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника с гипотенузой $R$ и катетом $R-h$ имеем $\rho^2 = R^2 - (R-h)^2 = h(2R-h)$. При $h = R/3$:

$$S_{\text{осн}} = \pi\rho^2 = \pi h(2R-h) = \pi \cdot \frac{R}{3} \cdot \frac{5R}{3} = \frac{5\pi R^2}{9}.$$

**5. Сила.** Соберём ответ «матрёшкой»:

$$F = p\,S_{\text{осн}} = \frac{kQ^2}{8\pi R^4} \cdot \frac{5\pi R^2}{9} = \frac{5kQ^2}{72R^2} = \frac{5Q^2}{288\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Сила электрического отталкивания направлена вдоль оси от центра сферы, поэтому удерживающая сила направлена вдоль оси к центру сферы (на рисунке — вправо) и по модулю равна найденной. Для произвольной высоты сегмента тем же путём получаем $F = \dfrac{kQ^2}{8R^4}\,h(2R-h)$.




*Зависимость $F(h)$ от высоты сегмента: парабола, максимум при $h = R$ (полусфера), ноль при $h = 2R$. Отмечено $h = R/3$*

**Проверка.** Размерность: $kQ^2/R^2$ — сила, как закон Кулона. Пределы: при $h = 2R$ (сегмент — вся сфера) $F = 0$: заряды одной системы не создают результирующей силы на неё саму; при $h = R$ (полусфера) $F = \dfrac{kQ^2}{8R^2}$ — известная сила отталкивания двух половин заряженной сферы; при малой $h$ $F \approx \dfrac{kQ^2}{4R^3}h$ — площадь основания, умноженная на давление. Второй независимый способ: прямое численное суммирование закона Кулона по парам площадок (сегмент — остальная сфера) даёт $0{,}0693\,kQ^2/R^2$ при точном значении $5/72 \approx 0{,}0694$.

**Ответ.** $F = \dfrac{5kQ^2}{72R^2} = \dfrac{5Q^2}{288\pi\varepsilon_0 R^2}$, направлена вдоль оси сегмента к центру сферы.