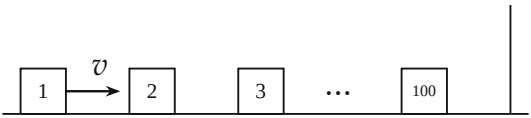
Сто кубиков у стенки

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 1] Сто одинаковых кубиков с ребром a расположены на горизонтальной поверхности вдоль прямой, перпендикулярной стенке. Расстояния между всеми кубиками и сотым кубиком и стенкой одинаковы и равны $1{,}4a$ (см. рисунок). Первый кубик начинают двигать с постоянной скоростью v к стенке. Через некоторое время он заставит двигаться второй, третий и т.д. кубики. Через какое время сотый кубик коснется стенки? Скорость первого кубика не меняется в течение всего движения.



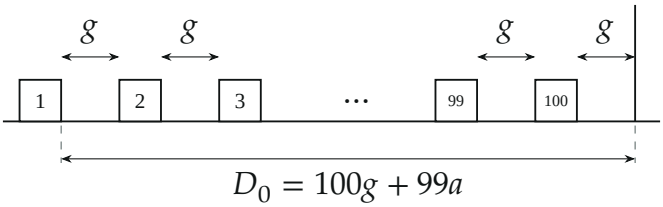
▲ **Решение.** **Что происходит.** Первый кубик едет с постоянной скоростью v, догоняет второй и начинает его толкать; второй, сдвинувшись, через некоторое время догоняет третий, и так далее по цепочке. Кубик, которого коснулся предыдущий, едет дальше с той же скоростью v вплотную к толкающему, и расстояние между ними больше не меняется. Сотый кубик коснётся стенки, когда все 100 промежутков будут закрыты. Значит, главная идея — найти, на сколько сократилось расстояние от первого кубика до стенки, то есть путь первого кубика, а время получить делением на v.

Обозначения. $g = 1{,}4a$ — промежуток между соседними кубиками и между сотым кубиком и стенкой; L — путь первого кубика до момента, когда сотый коснулся стенки; t — искомое время.

1. Что было в начале. Между первым и сотым кубиками стоят 99 пар соседних кубиков: 1–2, 2–3, …, 99–100. Между ними 99 промежутков, и ещё один — между сотым кубиком и стенкой. Всего их 100, и каждый равен g. Расстояние от передней грани первого кубика до стенки

$$D_0 = 100g + 99a,$$

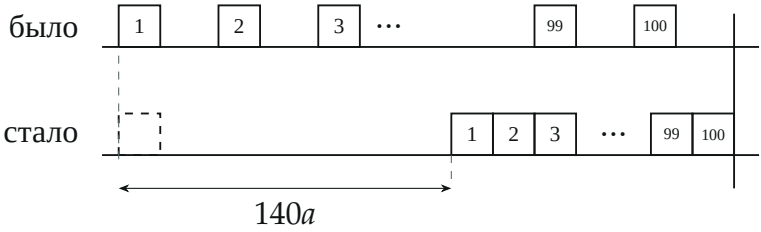
где $99a$ — ширина кубиков со 2-го по 100-й.



Начало: все промежутки равны $g = 1{,}4a$ (их 99 между кубиками и один до стенки); между кубиками 3 и 99 рисунок сокращён

2. Что стало в конце. Каждый кубик начинает двигаться только тогда, когда его толкнёт предыдущий, и далее едет с той же скоростью v. Поэтому сотый кубик сдвинулся с места лишь после того, как 99-й дотянулся до него, а 99-й — после 98-го, и так далее: к тому времени, когда сотый коснулся стенки, каждый кубик уже коснулся следующего и едет вплотную к нему. Все промежутки закрыты, и между первым кубиком и стенкой стоят вплотную 99 кубиков:

$$D_1 = 99a.$$



Было (верхний ряд) и стало (нижний ряд, штрихом — где стоял первый кубик): все кубики вплотную, первый сдвинулся к стенке; рисунок не в масштабе

3. Путь первого кубика. Стенка неподвижна, а первый кубик едет всё время, поэтому его путь равен уменьшению расстояния от его передней грани до стенки:

$$L = D_0 - D_1 = 100g + 99a - 99a = 100g = 140a.$$

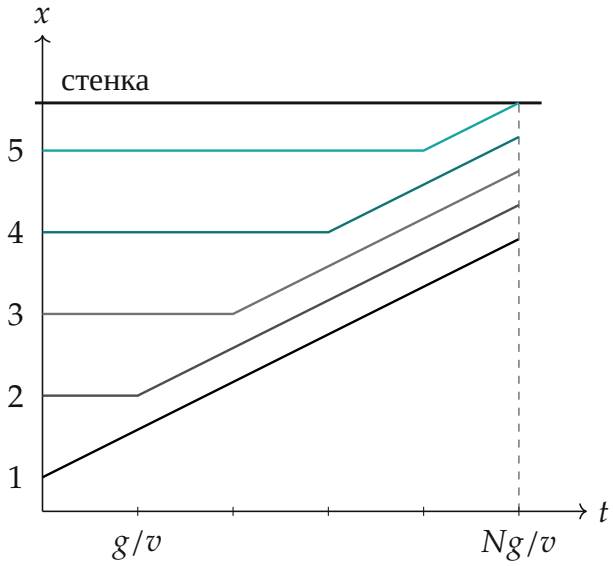
Ширина кубиков из пути ушла: каждый кубик уже учтён и в D_0, и в D_1.

4. Время. Первый кубик движется с постоянной скоростью v всё время, пока сотый не коснётся стенки, поэтому

$$t = \frac{L}{v} = \frac{140a}{v}.$$

5. Второй способ: по цепочке касаний. Первый кубик закрывает первый промежуток за g/v и касается второго; в этот момент второй начинает ехать со скоростью v и тоже проходит свой промежуток g за g/v. Значит, k-й кубик касается $(k+1)$-го в момент kg/v после начала движения, а k-й кубик начинает движение в момент $(k-1)g/v$. Сотый кубик начинает двигаться в момент $99g/v$ и проходит до стенки ещё g за g/v:

$$t = \frac{99g}{v} + \frac{g}{v} = \frac{100g}{v} = \frac{140a}{v}.$$



Передние грани пяти кубиков (аналог: вместо ста — пять) при $a = 1$, $g = 1{,}4$, $v = 1$: каждый кубик стоит, пока его не толкнут, а потом едет с тем же наклоном; все линии в конце оказываются вплотную

Обратите внимание: промежутков 100, а не 99: нужно посчитать и промежуток между сотым кубиком и стенкой. А ширину кубиков в путь первого кубика прибавлять не надо: она одна и та же в начале и в конце.

Проверка. Размерность: a/v — время. Для N кубиков тем же способом получается $t = Ng/v$; при $N = 1$ это время, за которое единственный кубик проходит g до стенки, а при $g \to 0$ время стремится к нулю — кубики стояли бы вплотную, и первый сразу толкнул бы все остальные. Числа: $a = 1$ см, $v = 1$ см/с дают 140 с, и оба способа дают одно значение.

Смысл: за каждый промежуток приходится заплатить временем g/v, а промежутков 100.

Ответ. $t = \dfrac{140a}{v}$.