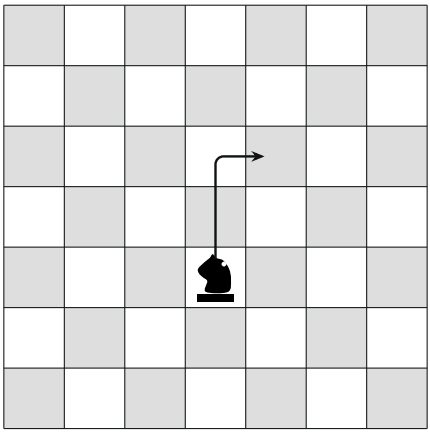
Конь за 2023 хода

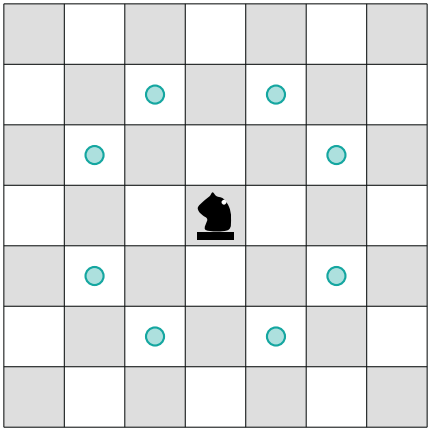
Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 2] Шахматный конь ходит «буквой гэ» (см. рисунок). Пусть у нас есть бесконечная шахматная доска, на которой находится один конь. Возможен ли такой путь коня, чтобы через 2023 хода он оказался на исходном поле? Если да, указать этот путь (или алгоритм его построения), если нет, доказать, что такого пути не существует.



▲ **Решение. Что происходит.** Клетки доски раскрашены в два цвета в шахматном порядке, и конь ходит так, что при каждом ходе он попадает на клетку *другого* цвета, чем та, с которой пошёл. Значит, после каждого хода цвет клетки, на которой стоит конь, меняется на противоположный, и вопрос о возвращении на исходное поле превращается в вопрос о чётности числа ходов. Главная идея — следить не за положением коня, а за цветом его клетки.

Обозначения. Занумеруем клетки парами целых чисел $(x;y)$: x — номер столбца, y — номер строки. Клетку $(x;y)$ назовём чётной, если число $x+y$ чётно, и нечётной, если нечётно. Соседние по стороне клетки отличаются на единицу в одной из координат, значит, их цвета разные: чётные клетки — одного цвета, нечётные — другого. Конь на бесконечной доске может стоять на любой клетке, поэтому края доски в решении не нужны.

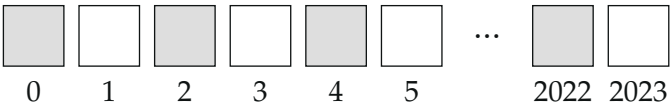
1. Куда ходит конь. За один ход конь сдвигается либо на $(\pm 1; \pm 2)$, либо на $(\pm 2; \pm 1)$. Всего это восемь ходов.



Все восемь ходов коня из одной клетки: он попадает только на клетки другого цвета (отмечены бирюзовыми кружками)

В каждом из них сумма $x + y$ меняется на $\pm 1 \pm 2$ или $\pm 2 \pm 1$, то есть на нечётное число: ± 1 или ± 3. Нечётное изменение суммы переводит чётную клетку в нечётную и наоборот. Итак, после каждого хода цвет клетки меняется.

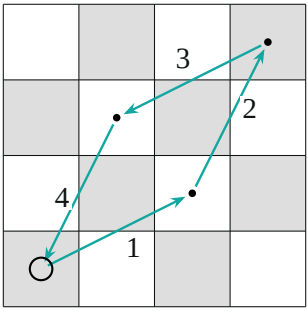
2. Цвет после *n* ходов. После первого хода цвет другой, после второго он снова исходный, после третьего другой, и так далее: цвет совпадает с исходным ровно тогда, когда число сделанных ходов чётно.



Цвет клетки коня после $0, 1, 2, \ldots$ ходов: на нечётных номерах он не совпадает с исходным, на чётных совпадает

3. Вывод. Число 2023 нечётно, поэтому после 2023 ходов конь стоит на клетке цвета, *отличного* от исходного, и, значит, не на исходной клетке. Какой бы путь он ни выбрал, этого не изменить: рассуждение не зависело от выбора ходов.

4. Почему чётное число ходов возможно. Это не противоречит возможности вернуться за чётное число ходов: например, за два хода (туда и обратно) или за четыре. Нужно лишь, чтобы число ходов было чётным.



Замкнутый путь коня из четырёх ходов: $(0;0) \to (2;1) \to (3;3) \to (1;2) \to (0;0)$*; цвет клетки меняется на каждом ходе и после четвёртого совпадает с исходным*

Обратите внимание: невозможность следует из цвета клеток, а не из «недостатка места» на доске. Доска бесконечна, но для нечётного числа ходов вернуться всё равно нельзя.

Проверка. Для двух ходов (туда и обратно) цвет совпал, как и положено при чётном числе. Для одного хода конь, очевидно, не возвращается. Для трёх ходов тоже нельзя: цвет другой. Для 2024 ходов путь существует: 1012 раз пройти «туда и обратно».

Смысл: нечётное число ходов всегда меняет цвет клетки, а на исходной клетке цвет исходный.

Ответ. Нет, такого пути не существует: после нечётного числа ходов конь стоит на клетке другого цвета, чем исходная.