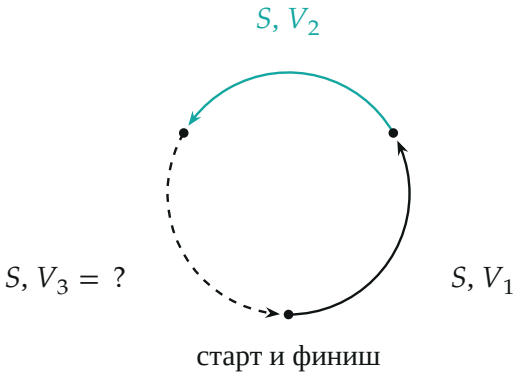
Три трети пути

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 3] Автомобиль проехал по некоторому замкнутому пути. Известно, что первую треть пути он проехал с постоянной скоростью V_1, вторую треть пути — с постоянной скоростью V_2. С какой постоянной скоростью автомобиль проехал последнюю треть пути, если на движение по второй трети пути он потратил треть всего времени?



Поясняющий рисунок: замкнутый путь разбит на три равные части длиной S (форма пути условна)

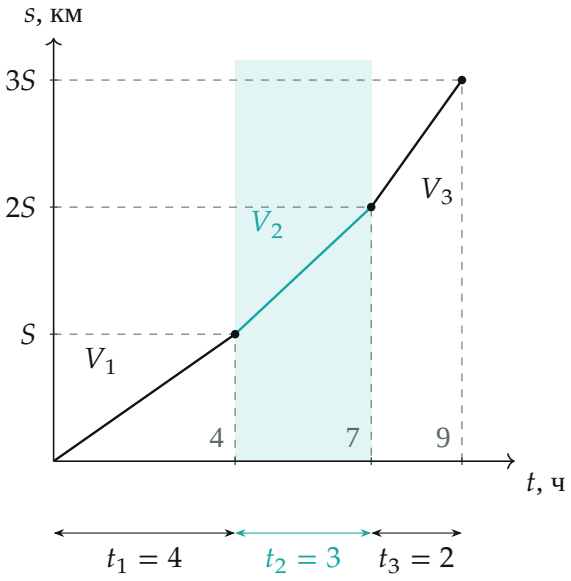
▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль проходит три участка одной длины S с разными скоростями, поэтому времена на них разные. Условие «вторая треть пути заняла треть всего времени» связывает эти три времени, а значит, и три скорости. Главная идея: если второй участок занял $1/3$ времени, то на первый и третий вместе пришлись оставшиеся $2/3$, то есть ровно вдвое больше, чем на второй. Класс задачи — неравномерное движение по участкам равной длины: считаем не средние скорости, а времена.

Обозначения. S — длина одной трети пути (весь путь $3S$); t_1, t_2, t_3 — времена движения по первой, второй и третьей трети; $t = t_1 + t_2 + t_3$ — полное время; V_3 — искомая скорость.

1. Времена на участках. На каждой трети скорость постоянна, поэтому время — это путь, делённый на скорость этой трети:

$$t_1 = \frac{S}{V_1}, \qquad t_2 = \frac{S}{V_2}, \qquad t_3 = \frac{S}{V_3}.$$

На графике пути от времени скорость — наклон участка: чем быстрее, тем отрезок положе по времени и круче по пути. Все три отрезка поднимаются на одну высоту S, а длятся по-разному.

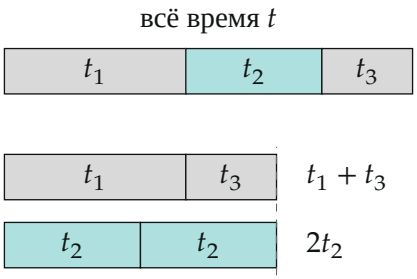


Путь от времени для $V_1 = 60$, $V_2 = 80$, $V_3 = 120$ км/ч и $S = 240$ км (числа взяты для наглядности, в задаче их нет): бирюзовая полоса — средняя треть пути, она длится 3 ч из 9 ч

2. Условие о трети времени. По условию $t_2 = \frac{t}{3}$, то есть $3t_2 = t_1 + t_2 + t_3$. Отсюда

$$t_1 + t_3 = 2t_2.$$

Сумма времён на первой и последней трети равна удвоенному времени на средней.



Те же времена в масштабе: $t_1 + t_3 = 4 + 2 = 6$ *ч и* $2t_2 = 3 + 3 = 6$ *ч*

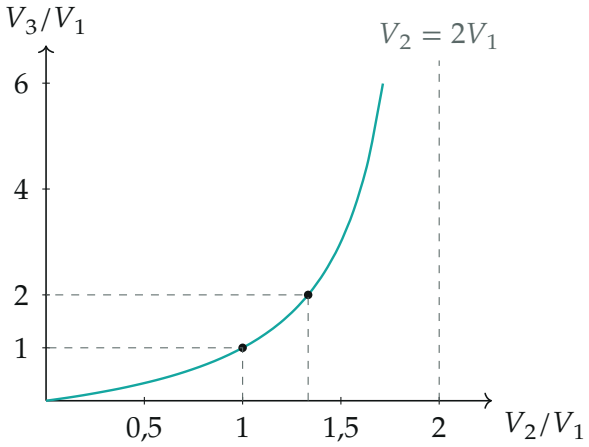
3. Подставим времена. Запишем $t_1 + t_3 = 2t_2$ через скорости:

$$\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_3} = \frac{2S}{V_2}.$$

Длина участка S сокращается: от неё ответ не зависит. Неизвестным осталась только V_3:

$$\frac{1}{V_3} = \frac{2}{V_2} - \frac{1}{V_1} = \frac{2V_1 - V_2}{V_1 V_2} \quad \Rightarrow \quad V_3 = \frac{V_1 V_2}{2V_1 - V_2}.$$

4. Когда такой автомобиль возможен. Скорость V_3 положительна, только если $2V_1 > V_2$. Причина видна по временам: $t_3 = S/V_3 > 0$, поэтому $t_1 = 2t_2 - t_3 < 2t_2$, то есть $S/V_1 < 2S/V_2$ и $V_2 < 2V_1$. Чем ближе V_2 к $2V_1$, тем меньше t_3 и тем больше V_3: при $V_2 \to 2V_1$ имеем $V_3 \to \infty$.



Скорость на последней трети в единицах V_1 в зависимости от V_2/V_1: при $V_2 = V_1$ она равна V_1, при $V_2/V_1 = 4/3$ (пример выше) — $2V_1$, при $V_2 \to 2V_1$ неограниченно растёт

Обратите внимание: «треть времени» и «треть пути» — разные величины. Средняя скорость на второй трети здесь не нужна, а складывать скорости или брать их среднее арифметическое нельзя: участки равны по длине, а не по времени, и усреднять надо обратные скорости.

Проверка. Если $V_1 = V_2 = V$, то $V_3 = V$: автомобиль едет равномерно, и вторая треть пути занимает ровно треть времени. Числовой пример: $V_1 = 60$, $V_2 = 80$ км/ч дают $V_3 = \dfrac{60 \cdot 80}{120 - 80} = 120$ км/ч, а при $S = 240$ км времена 4, 3 и 2 ч, причём $3/9 = 1/3$. Размерность: $[V_1V_2]/[V_1]$ — скорость. Смысл: из $\dfrac{2}{V_2} = \dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_3}$ видно, что V_2 — среднее гармоническое V_1 и V_3.

Ответ. $V_3 = \dfrac{V_1V_2}{2V_1 - V_2}$, при условии $2V_1 > V_2$.