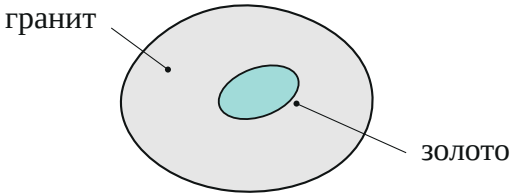
Самородок в граните

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 5] В куске гранита содержится золотой самородок. Масса и плотность куска составляют $m = 100$ г и $\rho = 6$ г/см^3 соответственно. Определить массу самородка. Считать, что в куске есть только гранит и золото. Плотность гранита $\rho_{гр} = 2{,}6$ г/см^3, плотность золота $\rho_{зол} = 19{,}3$ г/см^3.

▲ **Решение. Что происходит.** Кусок состоит из двух веществ, и про него известны две величины: масса и средняя плотность, а значит, и объём $V = m/\rho$. Неизвестных тоже две — масса золота и масса гранита — и есть два закона, которые их связывают: масса куска равна сумме масс частей, а объём куска — сумме объёмов частей. Из этих двух уравнений находится масса самородка.

Обозначения. $m_{зол}$, $m_{гр}$ — массы золота и гранита; $V_{зол}$, $V_{гр}$ — их объёмы; V — объём всего куска. Пустот в куске нет, поэтому объёмы складываются.



Поясняющий рисунок: кусок гранита с самородком внутри

1. Объём куска. Средняя плотность куска — это его масса, делённая на объём, поэтому

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{100}{6} \approx 16{,}7 \text{ см}^3.$$

2. Два закона для частей. Масса куска равна сумме масс гранита и золота, объём — сумме объёмов, а объём каждого вещества — его масса,

делённая на плотность:

$$m = m_{\text{зол}} + m_{\text{гр}}, \qquad \frac{m}{\rho} = V = \frac{m_{\text{зол}}}{\rho_{\text{зол}}} + \frac{m_{\text{гр}}}{\rho_{\text{гр}}}.$$

3. Масса самородка. Исключим массу гранита: $m_{\text{гр}} = m - m_{\text{зол}}$. Получаем

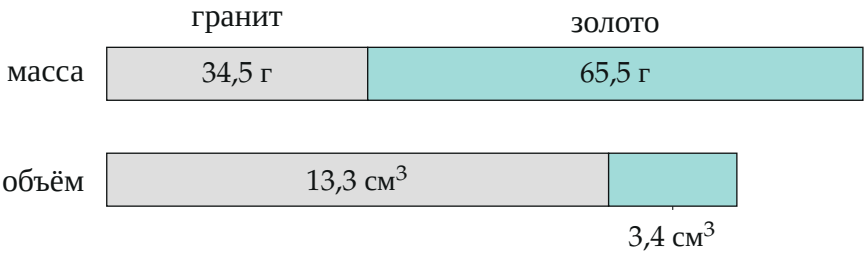
$$\frac{m}{\rho} = \frac{m_{\text{зол}}}{\rho_{\text{зол}}} + \frac{m - m_{\text{зол}}}{\rho_{\text{гр}}} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{зол}}\Big(\frac{1}{\rho_{\text{гр}}} - \frac{1}{\rho_{\text{зол}}}\Big) = m\Big(\frac{1}{\rho_{\text{гр}}} - \frac{1}{\rho}\Big),$$

откуда

$$m_{\text{зол}} = m\,\frac{1/\rho_{\text{гр}} - 1/\rho}{1/\rho_{\text{гр}} - 1/\rho_{\text{зол}}} = \frac{m\,\rho_{\text{зол}}(\rho - \rho_{\text{гр}})}{\rho\,(\rho_{\text{зол}} - \rho_{\text{гр}})}.$$

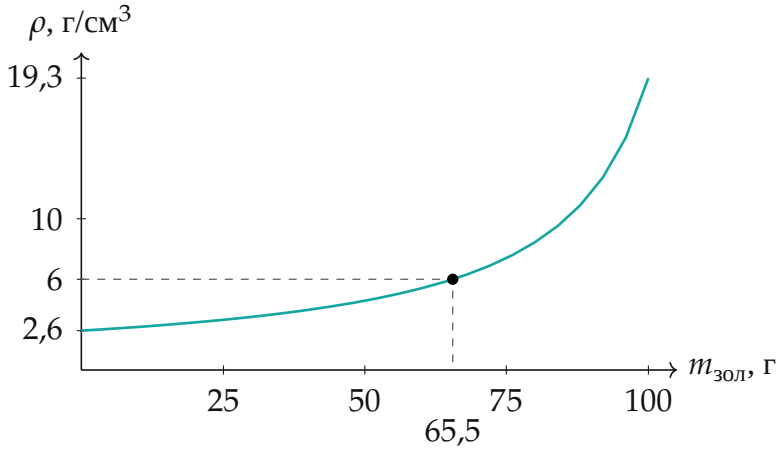
Подставляем числа:

$$m_{\text{зол}} = \frac{100 \cdot 19{,}3 \cdot (6 - 2{,}6)}{6 \cdot (19{,}3 - 2{,}6)} = \frac{6562}{100{,}2} \approx 65{,}5 \text{ г}.$$



Кусок массой 100 г и объёмом 16,7 см^3: самородок — почти две трети массы, но пятая часть объёма (длины отрезков в своём масштабе для каждой полосы)

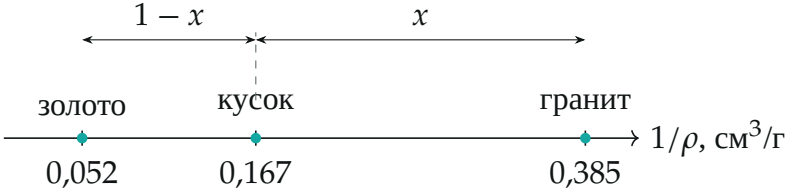
4. Что получилось. Масса гранита $m_{\text{гр}} = 100 - 65{,}5 = 34{,}5$ г, объёмы $V_{\text{гр}} = \dfrac{34{,}5}{2{,}6} \approx 13{,}3$ см^3 и $V_{\text{зол}} = \dfrac{65{,}5}{19{,}3} \approx 3{,}4$ см^3, и сумма 16,7 см^3 совпадает с V. Золота по массе много, а по объёму мало: оно в семь с лишним раз плотнее гранита.



Средняя плотность куска в зависимости от массы золота при $m = 100$ г: кривая растёт от $\rho_{гр}$ до $\rho_{зол}$ и значение 6 г/см^3 достигается ровно один раз

5. Второй способ: рычаг на оси удельных объёмов. Величина $1/\rho$ — объём единицы массы. У куска она получается усреднением по массе: $\dfrac{1}{\rho} = x\,\dfrac{1}{\rho_{зол}} + (1-x)\,\dfrac{1}{\rho_{гр}}$, где $x = m_{зол}/m$. Значит, точка $1/\rho$ лежит между $1/\rho_{зол}$ и $1/\rho_{гр}$ и делит расстояние между ними в отношении $x : (1-x)$ (правило рычага):

$$x = \frac{1/2{,}6 - 1/6}{1/2{,}6 - 1/19{,}3} = \frac{0{,}2179}{0{,}3328} \approx 0{,}655, \qquad m_{зол} = xm \approx 65{,}5 \text{ г}.$$



Ось удельных объёмов $1/\rho$: точка куска делит отрезок между золотом и гранитом в отношении долей масс

Обратите внимание: плотность куска *нельзя* получить как среднее плотностей: $(2{,}6 + 19{,}3)/2 \approx 10{,}9 \neq 6$. Складываются массы и объёмы,

а не плотности, и средняя плотность — масса, делённая на объём, а не среднее арифметическое.

Проверка. Размерность: ρ в числителе и знаменателе сокращается, остаётся масса — граммы. Пределы: при $\rho \to \rho_{\text{гр}}$ формула даёт $m_{\text{зол}} \to 0$ (кусок — чистый гранит), при $\rho \to \rho_{\text{зол}}$ — $m_{\text{зол}} \to m$ (чистое золото); наше $\rho = 6$ лежит между 2,6 и 19,3, значит, задача имеет решение. Численная проверка на python по объёмам: $V_{\text{зол}} = \dfrac{m - \rho_{\text{гр}} V}{\rho_{\text{зол}} - \rho_{\text{гр}}} = \dfrac{100 - 43{,}3}{16{,}7} \approx 3{,}39$ см^3, $m_{\text{зол}} = 19{,}3 \cdot 3{,}39 \approx 65{,}5$ г.

Смысл: самородок мал по размеру, но тяжёл, поэтому и «тянет» среднюю плотность куска вверх, с 2,6 до 6.

Ответ. $m_{\text{зол}} = \dfrac{m\,\rho_{\text{зол}}(\rho - \rho_{\text{гр}})}{\rho\,(\rho_{\text{зол}} - \rho_{\text{гр}})} \approx 65{,}5$ г.