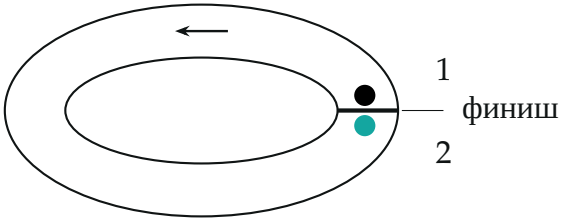
Автогонки: 60 кругов

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 2] Во время соревнований по автомобильным гонкам победитель, пройдя 60 кругов, обогнал второго призёра на 2 круга. Какова средняя скорость движения второго автомобиля на всей дистанции, если средняя скорость первого 120 км/ч. Все свои круги каждый автомобиль проходит одинаково.

▲ **Решение. Что происходит.** Средняя скорость — это путь, делённый на время, а все круги одной длины. Когда победитель закончил 60 кругов, второй автомобиль успел проехать только 58. Раз каждый круг он проезжает за одно и то же время, его скорость в 58 раз меньше пути в 60 кругов за то же время, то есть $\frac{58}{60}$ скорости первого. Главная идея — сравнить пути, пройденные за одно время, а не искать время по отдельности.

Обозначения. S — длина одного круга; t_1 — время победителя на 60 кругов; t_2 — время второго автомобиля на те же 60 кругов; $v_1 = 120$ км/ч, v_2 — средние скорости на всей дистанции (60 кругов).



Поясняющий рисунок: в момент финиша победителя второй автомобиль закончил только 58-й круг и находится на линии старта–финиша

1. Победитель. Победитель прошёл $60S$ за время t_1:

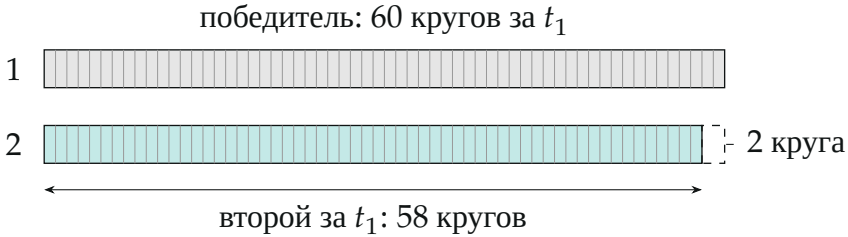
$$v_1 = \frac{60S}{t_1} = 120 \text{ км/ч}.$$

2. Второй автомобиль к финишу победителя. Слова «обогнал на 2 круга» означают, что к моменту t_1 второй автомобиль прошёл на два

круга меньше, то есть $58S$. Время одного круга у него постоянно, поэтому его скорость в течение первых t_1 такая же, как и на всей дистанции:

$$v_2 = \frac{58S}{t_1}.$$

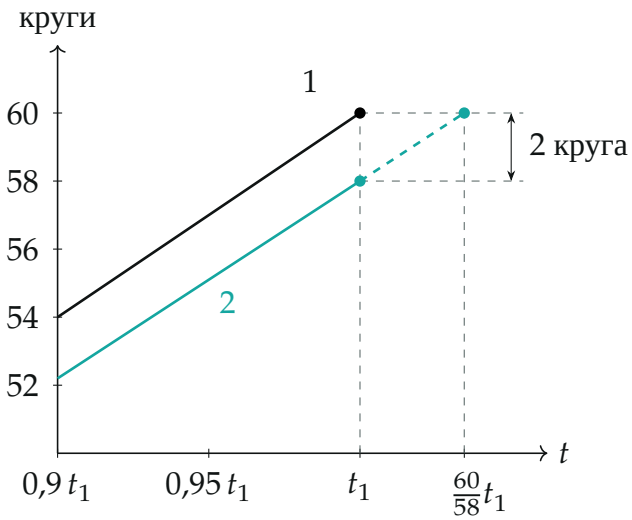
Если нужно проверить это через время t_2 прохождения 60 кругов: один круг занимает $\tau_2 = t_1/58$, значит, $t_2 = 60\tau_2 = \frac{60}{58}\,t_1$ и $v_2 = \frac{60S}{t_2} = \frac{58S}{t_1}$.



Пути в кругах: победитель прошёл 60 кругов, второй за то же время t_1 — 58; два недостающих круга второй проходит уже после финиша победителя

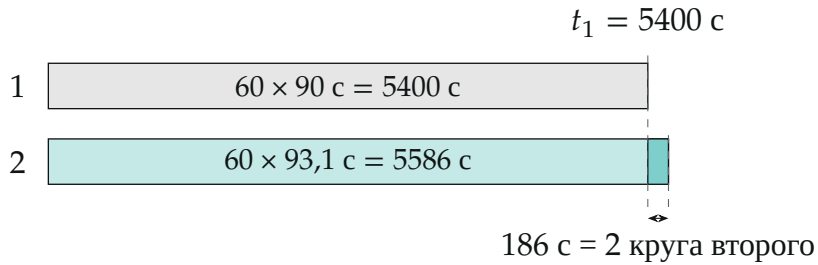
3. Отношение скоростей. Разделим v_2 на v_1: длина круга S и время t_1 сокращаются:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{58S/t_1}{60S/t_1} = \frac{58}{60} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{58}{60} \cdot 120 \text{ км/ч} = 116 \text{ км/ч}.$$



Число пройденных кругов от времени вблизи финиша победителя (увеличенный фрагмент): машины едут равномерно, второй к моменту t_1 на 2 круга позади, а свои 60 кругов закончит в момент $\frac{60}{58}t_1$

4. Проверка числами. Пусть круг $S = 3$ км. Победитель: $60 \cdot 3 = 180$ км за $180/120 = 1{,}5$ ч $= 5400$ с, то есть 90 с на круг. Второй проезжает круг за $3/116$ ч $\approx 93{,}1$ с; за 5400 с он проедет $5400/93{,}1 \approx 58$ кругов, а 60 кругов — за $60 \cdot 93{,}1 \approx 5586$ с. Победитель опережает его на $5586 - 5400 = 186$ с, а это как раз два круга второго автомобиля: $2 \cdot 93{,}1 \approx 186$ с.



Время прохождения 60 кругов (при $S = 3$ км): победитель — 5400 с, второй — 5586 с; разница 186 с равна двум кругам второго автомобиля

Обратите внимание: у второго автомобиля средняя скорость на всей дистанции и на первых 58 кругах одна и та же только потому, что в условии сказано: все круги он проходит одинаково. Если бы скорость на кругах менялась, нельзя было бы считать так просто.

Проверка. Размерность: отношение $\frac{58}{60}$ безразмерно, скорость получилась в км/ч. Предел: если бы отставание было 0 кругов, скорости совпали бы ($v_2 = v_1$); если бы второй не успел проехать ни одного круга, $v_2 \to 0$. Значение 116 км/ч чуть меньше 120 км/ч, как и должно быть при небольшом отставании.

Смысл: за время, пока победитель проезжает 60 кругов, второй проезжает 58 — на $\frac{2}{60} \approx 3{,}3\,\%$ меньше, и скорость меньше в той же пропорции.

Ответ. $v_2 = \dfrac{58}{60}\, v_1 = 116$ км/ч.