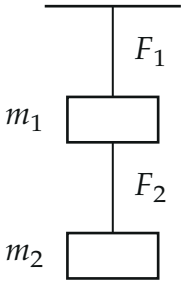
Грузы на двух верёвках

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 3] Два груза подвешены на двух лёгких верёвках, так как показано на рисунке. Отношение сил натяжения верхней и нижней верёвки известно: $F_1 : F_2 = 3 : 1$. Найти отношение масс верхнего и нижнего грузов $m_1 : m_2$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Грузы висят неподвижно, значит, сумма сил на каждый из них равна нулю. Верёвки лёгкие, поэтому сила натяжения во всех точках одной верёвки одинакова. Нижняя верёвка держит только нижний груз, а верхняя — оба груза, и поэтому её натяжение больше. Отношение натяжений $3 : 1$ даёт отношение масс. Главная идея — записать условие равновесия для каждого груза отдельно и найти, что именно держит каждая верёвка.

Обозначения. Ось y направим вверх. F_1 — сила натяжения верхней верёвки, F_2 — нижней; m_1, m_2 — массы верхнего и нижнего грузов; g — ускорение свободного падения. Проекции сил запишем со знаком.

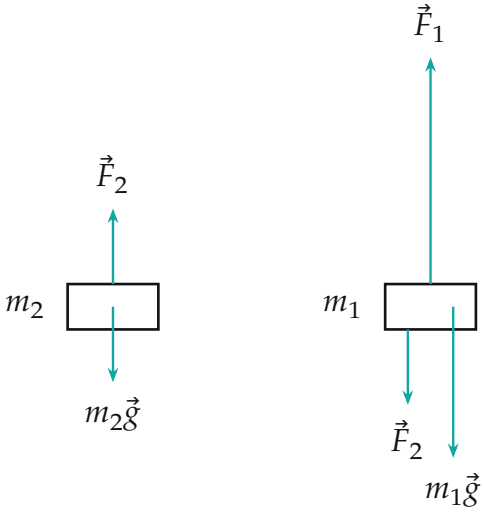
1. Нижний груз. На груз m_2 действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ вниз и сила натяжения нижней верёвки $\vec{F}_2$ вверх. Груз покоится, поэтому в проекции на ось y

$$F_2 - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = m_2 g.$$

2. Верхний груз. На груз m_1 действуют: $\vec{F}_1$ вверх от верхней верёвки, сила тяжести $m_1\vec{g}$ вниз и сила $\vec{F}_2$ вниз от нижней верёвки (она тянет верхний груз вниз с той же силой F_2, с какой верхний груз тянет её вверх). В проекции на ось y

$$F_1 - F_2 - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 + m_1 g.$$

Подставим $F_2 = m_2 g$: $F_1 = (m_1 + m_2)\, g$. Верхняя верёвка действительно держит *оба* груза.



Силы на каждый груз отдельно при $m_2 = 1$, $m_1 = 2$ (в единицах $m_2 g$ длины стрелок: $F_2 = 1$, $m_2 g = 1$; $F_1 = 3$, $m_1 g = 2$, $F_2 = 1$)

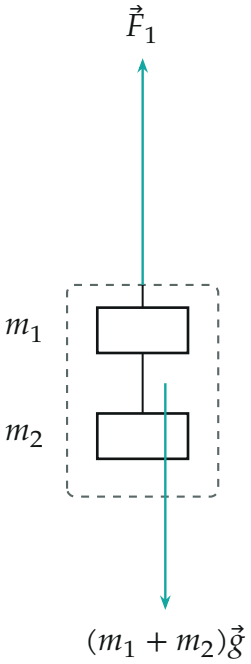
3. Отношение масс. Разделим $F_1 = (m_1 + m_2)g$ на $F_2 = m_2 g$; g и m_2 сокращаются:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} + 1.$$

По условию $\dfrac{F_1}{F_2} = 3$, откуда

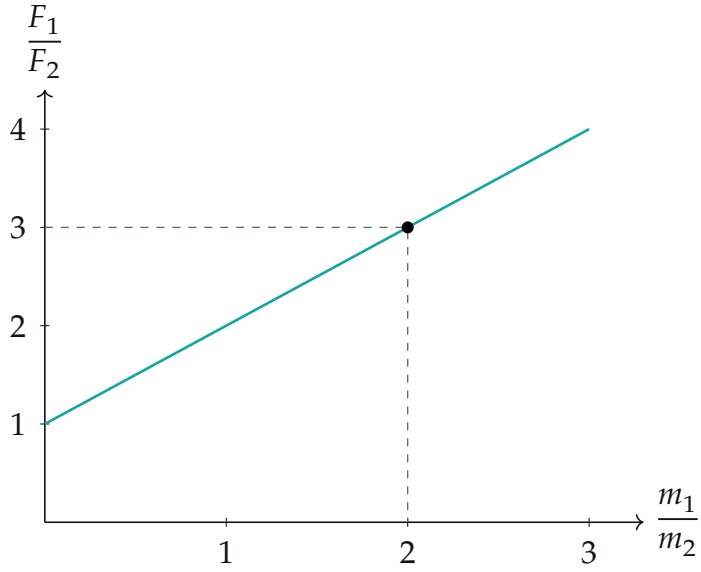
$$\frac{m_1}{m_2} + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = 2,$$

то есть $m_1 : m_2 = 2 : 1$.



Второй способ: система из двух грузов целиком; внутренние силы F_2 в неё не входят, снаружи действуют только $\vec{F}_1$ и общая сила тяжести

4. Второй способ: система из двух грузов. Возьмём оба груза вместе с нижней верёвкой как одно тело. Внутренние силы (натяжение F_2 на обоих концах нижней верёвки) в уравнении для системы не нужны: они приложены к разным частям системы и друг друга уравновешивают. Внешних сил две: $\vec{F}_1$ вверх и сила тяжести $(m_1+m_2)\vec{g}$ вниз. Равновесие даёт $F_1 = (m_1 + m_2)g$ — то же, что получилось в п. 2. Нижняя верёвка — система из одного груза m_2: $F_2 = m_2 g$.



Отношение сил натяжения как функция отношения масс: $\frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{m_1}{m_2}$*; при* $\frac{F_1}{F_2} = 3$ *получаем* $\frac{m_1}{m_2} = 2$

Обратите внимание: верхняя верёвка держит не только верхний груз, но и нижний. Поэтому $F_1 = 3F_2$ не означает, что $m_1 = 3m_2$: масса m_2 входит в обе силы.

Проверка. Числа: $m_2 = 1$ кг, $m_1 = 2$ кг, $g = 9{,}8$ м/с^2. Тогда $F_2 = 9{,}8$ Н, $F_1 = (2 + 1) \cdot 9{,}8 = 29{,}4$ Н, и $F_1/F_2 = 3$. Предел: при $m_1 \to 0$ верхняя верёвка держит только m_2, и $F_1/F_2 \to 1$, как и показывает график; при росте m_1 отношение растёт без ограничения.

Смысл: верхняя верёвка держит весь вес — три единицы $m_2 g$: одну составляет вес нижнего груза, две — вес верхнего.

Ответ. $m_1 : m_2 = 2 : 1$.