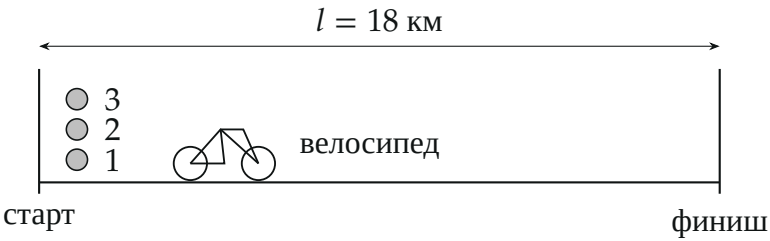
Трое с одним велосипедом

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 4] Команда из трёх спортсменов должна пройти по определённому маршруту за минимальное время. Длина маршрута $l = 18$ км. Спортсмены могут бежать со скоростью $v = 15$ км/ч, или ехать на велосипеде со скоростью $3v$. При этом на команду полагается только один одноместный велосипед. Предложите стратегию движения на маршруте, обеспечивающую минимальное время его прохождения, и найдите это минимальное время. Время прохождения маршрута командой определяется по последнему пришедшему к финишу спортсмену.

▲ **Решение. Что происходит.** Время команды — время того, кто пришёл последним. Велосипед втрое быстрее бега, но он один и едет только вместе с одним человеком. Чтобы потери были наименьшими, надо, чтобы велосипед нигде не ехал назад и все три спортсмена приходили к финишу одновременно: если бы один пришёл раньше, часть его езды можно было бы передать другим, и общее время уменьшилось бы. Одинаковое время означает одинаковые доли: каждый проезжает на велосипеде треть маршрута, а остальные две трети пробегает. Главная идея — такая «эстафета» велосипеда.

Обозначения. Спортсмены 1, 2, 3; $l = 18$ км — длина маршрута; $v = 15$ км/ч — скорость бега, $3v = 45$ км/ч — скорость на велосипеде; T — время команды.



Поясняющий рисунок: маршрут длиной l, три спортсмена и один велосипед на старте

1. Стратегия. Разделим маршрут на три части по $l/3$ (6 км каждая).

1. Спортсмен 1 едет на велосипеде первую треть, оставляет велосипед на отметке $l/3$ и дальше бежит. Спортсмены 2 и 3 всё это время бегут.
2. Спортсмены 2 и 3 добегают до отметки $l/3$, где лежит велосипед. Спортсмен 2 едет на нём вторую треть и оставляет его на отметке $2l/3$, дальше бежит; спортсмен 3 продолжает бежать.
3. Спортсмен 3 добегает до отметки $2l/3$ и едет на велосипеде последнюю треть.

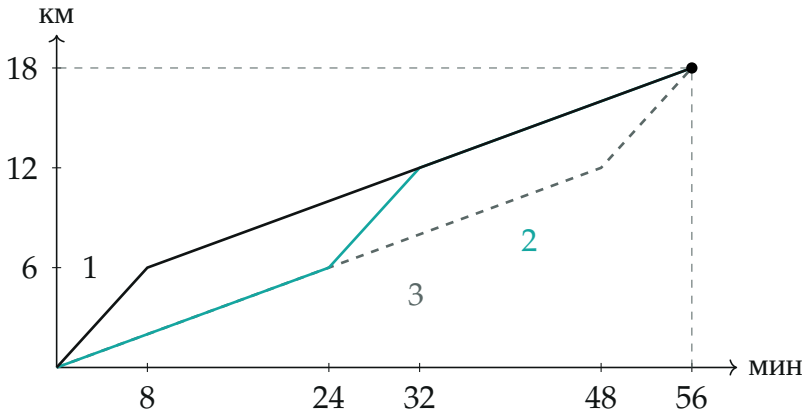


Кто на каком участке бежит и едет: каждый проезжает ровно одну треть маршрута; нижняя полоса — путь велосипеда

2. Время каждого. Каждый спортсмен пробегает $\frac{2}{3}l$ со скоростью v и проезжает $\frac{1}{3}l$ со скоростью $3v$ (порядок участков на время не влияет, ждать никому не приходится: велосипед оставлен раньше, чем к нему подходят):

$$T = \frac{2l/3}{v} + \frac{l/3}{3v} = \frac{2l}{3v} + \frac{l}{9v} = \frac{7l}{9v}.$$

Подставим числа: $T = \dfrac{7 \cdot 18}{9 \cdot 15} = \dfrac{14}{15}$ ч $= 56$ мин. Проверим по участкам для спортсмена 3: бежит 12 км за $\dfrac{12}{15} = 0{,}8$ ч $= 48$ мин и едет 6 км за $\dfrac{6}{45}$ ч $= 8$ мин, итого 56 мин. У остальных то же.



Положение каждого спортсмена от времени: изломы — смена бега ездой; все три линии приходят в точку финиша (56 мин; 18 км) одновременно (линии 2 и 3 совпадают, пока оба бегут)

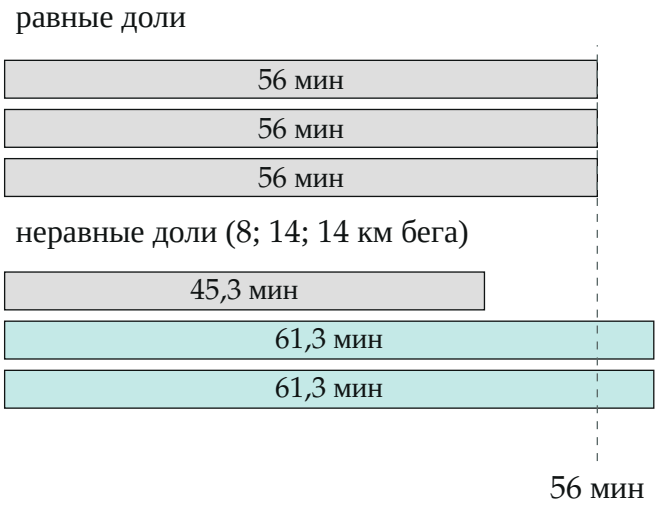
3. Быстрее нельзя. Пусть r_i — время, в течение которого i-й спортсмен бежит, s_i — время, в течение которого он едет, X — перемещение велосипеда по маршруту. Велосипед движется только пока на нём едут, поэтому X равно сумме путей езды всех троих; увозить его дальше финиша незачем, значит, $X \le l$. Каждый должен сместиться на l; бегом за время r_i он смещается не больше чем на vr_i, поэтому в сумме

$$3l \le v\sum r_i + X.$$

Время езды всех вместе не меньше $X/(3v)$ (если велосипед хоть раз едет назад, оно ещё больше), а каждый тратит на бег и езду не больше T, то есть $\sum r_i \le 3T - \sum s_i \le 3T - \dfrac{X}{3v}$. Подставим:

$$3l \le v\Big(3T - \frac{X}{3v}\Big) + X = 3vT + \frac{2}{3}X \le 3vT + \frac{2}{3}l \quad \Rightarrow \quad T \ge \frac{7l}{9v}.$$

Меньше $\dfrac{7l}{9v}$ время быть не может, а описанная стратегия достигает именно этого значения.



Время каждого спортсмена при одном и том же суммарном беге $2l = 36$ км: при равных долях все 56 мин, при неравных (8, 14 и 14 км бега) команда приходит за 61,3 мин

4. Что будет при неравных долях. Время одного спортсмена, который пробегает d из l километров, равно $\dfrac{d}{v} + \dfrac{l-d}{3v} = \dfrac{l+2d}{3v}$ и растёт с d. Суммарная езда не больше l, то есть $\sum d_i \geq 2l$. Время команды — наибольшее из трёх, и оно минимально, когда все d_i равны: $d_i = \frac{2}{3}l$. Например, при $d = (8; 14; 14)$ км время команды $\dfrac{18+28}{45} \approx 1{,}02$ ч $= 61{,}3$ мин, то есть больше 56 мин.

Обратите внимание: у организаторов в ответе стоит «$\dfrac{7l}{9v} = 1$ час»; при $l = 18$ км и $v = 15$ км/ч получается $\dfrac{14}{15}$ ч $= 56$ мин, а не час.

Проверка. Размерность: l/v — время. Без велосипеда команда шла бы $l/v = 72$ мин, а один велосипед, на котором едут по очереди, сокращает время на 16 мин.

Смысл: велосипед проезжает весь маршрут, но по частям, и каждый спортсмен выигрывает только на одной трети пути.

Ответ. $T_{\min} = \dfrac{7l}{9v} = \dfrac{14}{15}$ ч $= 56$ мин; каждый проезжает на велосипеде 6 км, остальное пробегает.