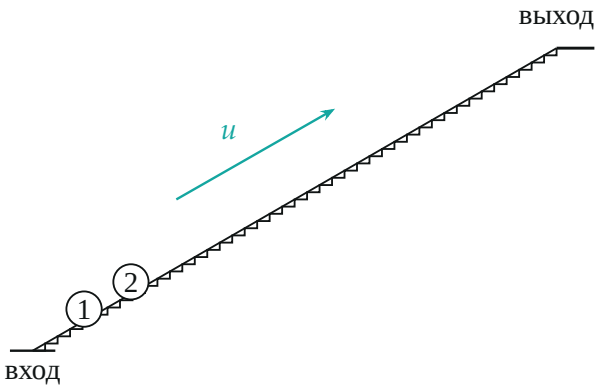
Эскалатор и двое друзей

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 5] Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причём в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (все шаги делались на следующую ступеньку — через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому, кто шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другому — 21 шаг. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?



Поясняющий рисунок: эскалатор с $N = 42$ ступеньками (число условно совпадает с ответом); оба друга одновременно ступают на нижние ступеньки, лента движется вверх со скоростью u, у верхнего порожка ступеньки уходят под гребёнку

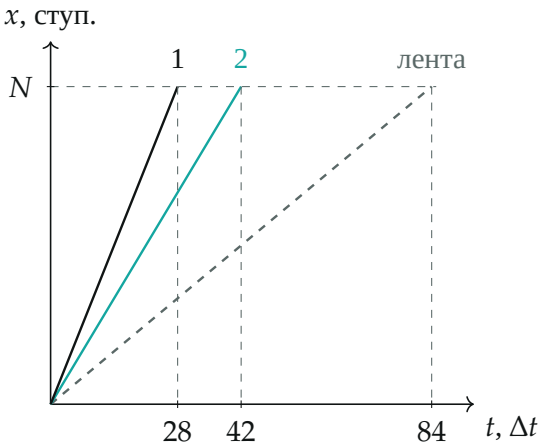
▲ **Решение. Что происходит.** Лента эскалатора сама везёт обоих вверх, а друзья ещё и шагают. Подъём складывается из двух вкладов: шаги друга (по ступенькам ленты) и движение самой ленты. Те ступеньки, которые друг не прошёл шагами, уехали под верхний порожек. Главная идея: скорость ленты у обоих друзей одна, и её можно выразить двумя способами, через данные каждого, а затем приравнять. Длину и скорость удобно считать в ступеньках, тогда неизвестное N — длина эскалатора. Класс задачи — относительное движение (лента и человек на ней).

Обозначения. N — число ступенек между входом и выходом; Δt — время одного шага быстрого друга, медленный шагает вдвое реже, за $2\Delta t$; u — скорость ленты в ступеньках за единицу времени; T_1, T_2 — времена подъёма быстрого и медленного. Быстрый сделал 28 шагов, значит $T_1 = 28\Delta t$; медленный — 21 шаг, $T_2 = 21 \cdot 2\Delta t = 42\Delta t$.

1. Подъём в системе земли. За время подъёма друг относительно земли проходит всю длину эскалатора, N ступенек. Эти N складываются из того, насколько проехала лента, и того, сколько ступенек друг прошёл шагами (каждый шаг — на следующую ступеньку, значит, одна ступенька на шаг). Для каждого друга

$$N = uT + n,$$

где n — число его шагов. Это закон сложения перемещений: перемещение относительно земли равно перемещению ленты плюс перемещение относительно ленты.



Положение в системе земли в ступеньках при $N = 42$ (найденном ниже): первый друг поднимается со скоростью 1,5 ступ./Δt и выходит в момент $28\,\Delta t$, второй — со скоростью 1 и выходит в $42\,\Delta t$; ступенька, на которой никто не шагает, доехала бы за $84\,\Delta t$ (скорость 0,5)

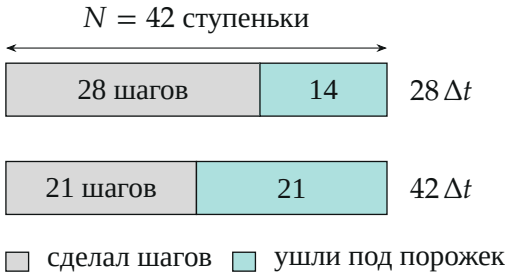
2. Два условия. Для быстрого и для медленного:

$$N = u \cdot 28\Delta t + 28, \qquad N = u \cdot 42\Delta t + 21.$$

Выразим из каждого скорость ленты в ступеньках за Δt:

$$u\,\Delta t = \frac{N - 28}{28}, \qquad u\,\Delta t = \frac{N - 21}{42}.$$

Числитель $N - n$ — как раз число ступенек, ушедших под порожек за время подъёма.

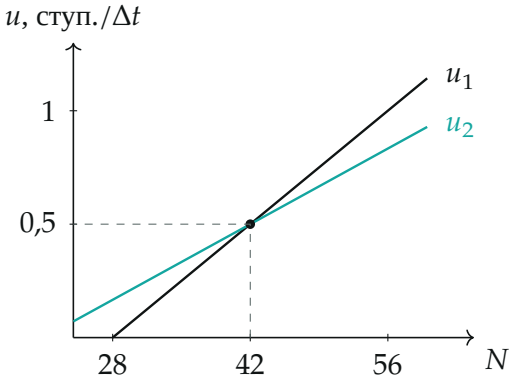


Из N ступенек подъёма часть друг прошёл шагами (серое), остальные уехали под порожек вместе с лентой (бирюзовое): у первого $42 - 28 = 14$ за $28\,\Delta t$, у второго $42 - 21 = 21$ за $42\,\Delta t$ — в обоих случаях $1/2$ ступеньки за Δt

3. Приравниваем. Скорость ленты одна, поэтому

$$\frac{N - 28}{28} = \frac{N - 21}{42} \quad \Rightarrow \quad 42\,(N-28) = 28\,(N-21) \quad \Rightarrow \quad 14N = 588,$$

$$N = 42.$$



Скорость ленты из условий каждого друга: $u_1 = \dfrac{N-28}{28}$, $u_2 = \dfrac{N-21}{42}$ *(в ступеньках за* Δt*). Лента одна, поэтому значения совпадают в точке пересечения:* $N = 42$, $u = 0{,}5$

Обратите внимание: N — не число шагов (их 28 и 21), а число ступенек эскалатора: часть ступенек друг не прошёл шагами, их унесла лента. Если лента неподвижна ($u = 0$), получилось бы $N = 28$ и $N = 21$ — противоречие, поэтому лента движется.

Проверка. Скорость ленты $u\Delta t = \dfrac{42-28}{28} = \dfrac{1}{2}$ ступеньки за Δt. Быстрый: лента за $28\Delta t$ везёт на 14 ступенек, сам идёт на 28, итого 42. Медленный: за $42\Delta t$ лента — 21 ступенька, сам — 21, итого 42. Размерность: N в ступеньках, как и n. Смысл: лента едет вдвое медленнее, чем шагает быстрый друг, поэтому ему нужно в два раза больше шагов, чем «собственного» подъёма ленты, а медленному — столько же, сколько проехала лента.

Ответ. $N = 42$ ступеньки.