Винни-Пух и ванна

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 2] «Винни-Пух и ванна».

Винни-Пух принимал ванну. Когда ванна была частично заполнена, Винни вспомнил, что съел не весь мёд у Кролика, выскочил из ванны и побежал к Кролику, забыв закрыть кран. Когда Винни-Пух вернулся, часть воды вылилась. Дан график зависимости объёма воды в ванне от времени. Найти: объём воды, которая вылилась из ванны.

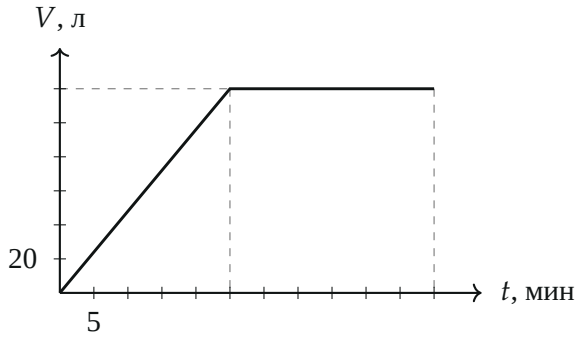


График из условия. Числа у осей организаторы подписали один раз: деление по оси V равно 20 л, по оси t — 5 мин; остальные значения читаем по числу делений

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода из крана льётся с постоянной скоростью. Сначала ванна наполняется, и график растёт. Потом объём перестаёт меняться, хотя кран открыт: значит, ванна полна и всё, что поступает, переливается через край. Главная идея: по растущему участку графика найдём скорость поступления воды, а затем узнаем, сколько воды поступило за время, пока объём стоял на месте.

Обозначения. V_0 — объём полной ванны, t_2 — момент, когда она стала полной, t_3 — момент, когда Винни вернулся, q — скорость поступления воды из крана (объём в минуту). Время идёт от начала наполнения, $t_1 = 0$.

1. Читаем график. Цена деления по оси V — 20 л, по оси t — 5 мин. Излом графика приходится на 5-е деление по времени, а полка — на 6-е

деление по объёму; полка кончается на 11-м делении. Получаем

$$t_2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ мин}, \qquad V_0 = 6 \cdot 20 = 120 \text{ л}, \qquad t_3 = 11 \cdot 5 = 55 \text{ мин}.$$

Эти числа на рисунке организаторов не подписаны напрямую; они согласуются с официальным решением, где использованы те же значения.

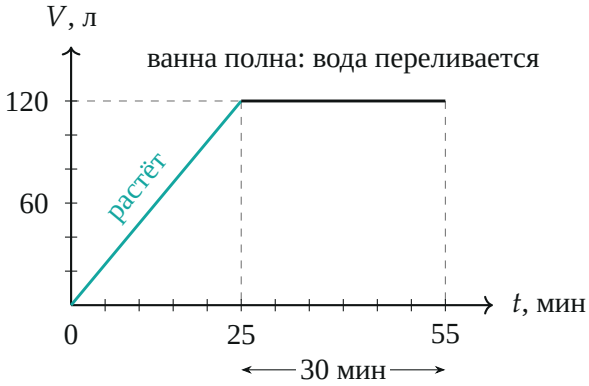


График с подписанными числами: наполнение идёт 25 мин, затем 30 мин объём не меняется; значения 120 л, 25 мин, 55 мин восстановлены по числу делений и совпадают с официальным решением

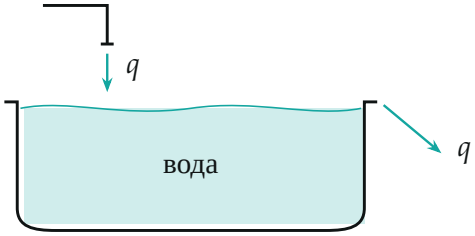
2. Скорость поступления воды. Пока ванна не полна, ничего не выливается, и весь поступивший объём остаётся в ней. Кран всё это время льёт с одной и той же скоростью (Винни его не закрывал и не трогал), поэтому на участке роста

$$q = \frac{V_0}{t_2} = \frac{120 \text{ л}}{25 \text{ мин}} = 4{,}8 \ \frac{\text{л}}{\text{мин}}.$$

Это наклон растущего участка графика: объём в минуту.

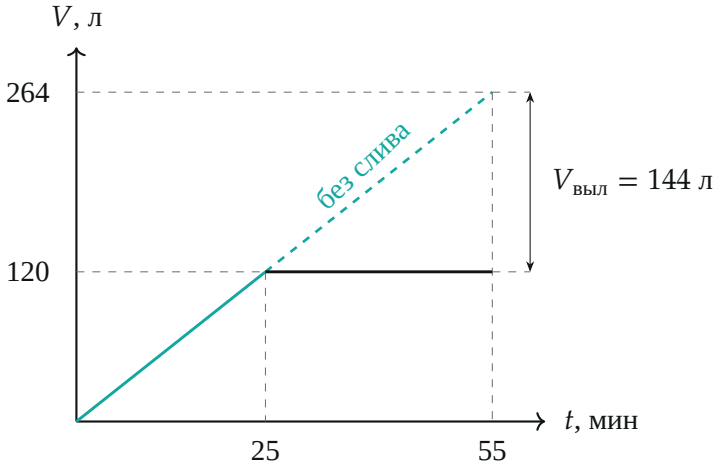
3. Вылившаяся вода. На полке объём не меняется, значит, за каждую минуту вытекает столько же воды, сколько поступает. Кран льёт те же $q = 4{,}8$ л/мин в течение $t_3 - t_2 = 30$ мин, и вся эта вода уходит через край:

$$V_{\text{выл}} = q\,(t_3 - t_2) = \frac{V_0\,(t_3 - t_2)}{t_2} = 4{,}8 \cdot 30 \text{ л} = 144 \text{ л}.$$



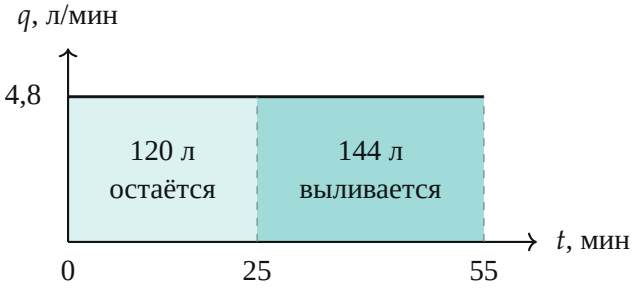
Ванна полна: сколько воды вливается из крана, столько же переливается через край; обе стрелки равны

Обратите внимание: вылилось больше воды (144 л), чем вмещает ванна (120 л). Противоречия нет: ванна полная и всё время переливалась, а кран за 30 минут принёс больше, чем её объём.



Без слива объём рос бы по пунктиру и к моменту t_3 дошёл бы до $4{,}8 \cdot 55 = 264$ л; ванна вмещает 120 л, остальное выливается

Проверка и второй способ. Размерность: л · мин/мин = л. Предел: если Винни вернулся бы сразу, как ванна наполнилась ($t_3 = t_2$), вылилось бы 0 л, и формула это даёт. Второй способ — без вылившегося объёма отдельно: кран за всё время t_3 принёс $qt_3 = 4{,}8 \cdot 55 = 264$ л, в ванне осталось $V_0 = 120$ л, значит вылилось $264 - 120 = 144$ л — то же число. Третий способ — площадь под графиком скорости поступления воды:



Скорость поступления воды $q = 4{,}8$ л/мин постоянна: объём воды — площадь под графиком; первый прямоугольник — вода, оставшаяся в ванне, второй — вылившаяся

Площадь второго прямоугольника $4{,}8 \cdot 30 = 144$ л. Три способа дают одно число.

Физический смысл: пока ванна наполнялась, вода копилась, а когда наполнилась — всё, что лил кран, уходило через край, и этого объёма набралось больше, чем в самой ванне.

Ответ. $V_{\text{выл}} = \dfrac{V_0\,(t_3 - t_2)}{t_2} = 144$ л.