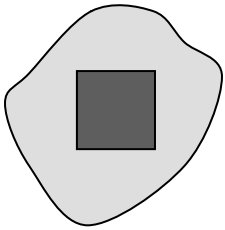
Железо внутри пластилина

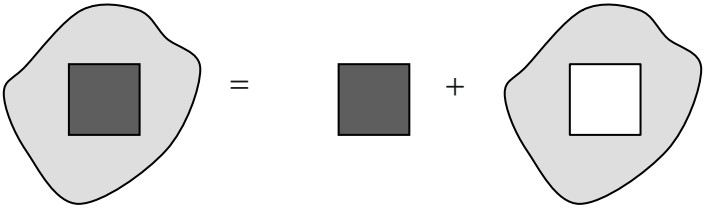
Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 4] «Железо внутри пластилина».

Масса тела из пластилина, внутри которого находится железный кубик со стороной $a = 3$ см, составляет $M = 285$ г (см. рисунок). Найти его объём. Плотность железа $\rho_1 = 7{,}87$ г/см^3, плотность пластилина $\rho_2 = 1{,}2$ г/см^3.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело состоит из двух частей: железного кубика внутри и пластилина вокруг него. И объём, и масса целого равны сумме объёмов и сумме масс частей. Объём кубика известен по его стороне, массу кубика даёт плотность железа, массу пластилина — вычитание из полной массы, а объём пластилина — его масса, делённая на плотность. Главная идея: сложить объёмы частей.

Обозначения. V — искомый объём тела; $V_1 = a^3$, m_1 — объём и масса кубика; V_2, m_2 — объём и масса пластилина. Считаем, что пустот в теле нет: пластилин плотно облегает кубик, поэтому $V = V_1 + V_2$ и $M = m_1 + m_2$.



всё тело:	кубик:	пластилин:
V	$V_1 = a^3$	V_2
M	$m_1 = \rho_1 V_1$	$m_2 = \rho_2 V_2$

Тело разделено на кубик и пластилин (пластилин — с полостью по форме кубика): объёмы и массы частей складываются

1. Объём кубика. Кубик — тело со стороной a:

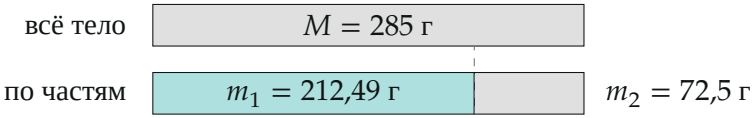
$$V_1 = a^3 = (3\text{ см})^3 = 27\text{ см}^3.$$

2. Масса кубика. Масса — плотность, умноженная на объём:

$$m_1 = \rho_1 V_1 = 7{,}87\text{ г/см}^3 \cdot 27\text{ см}^3 = 212{,}49\text{ г}.$$

3. Масса пластилина. Масса всего тела равна сумме масс кубика и пластилина, поэтому

$$m_2 = M - m_1 = 285\text{ г} - 212{,}49\text{ г} = 72{,}51\text{ г}.$$



Массы на одной шкале: бирюзовая часть — железный кубик, серая — пластилин

4. Объём пластилина. Пластилин однородный, его объём — масса, делённая на плотность:

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{72{,}51\text{ г}}{1{,}2\text{ г/см}^3} \approx 60{,}4\text{ см}^3.$$

5. Объём тела. Складываем объёмы частей:

$$V = V_1 + V_2 = 27 + 60{,}4 \approx 87{,}4\text{ см}^3.$$

В общем виде, подставляя $V_1 = a^3$, $m_1 = \rho_1 a^3$ и $V_2 = (M - \rho_1 a^3)/\rho_2$:

$$V = a^3 + \frac{M - \rho_1 a^3}{\rho_2} = \frac{M}{\rho_2} - a^3\,\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \approx 87{,}4\text{ см}^3.$$



Объёмы на одной шкале: кубик занимает меньше трети тела, хотя по массе он почти три четверти

Обратите внимание: нельзя считать объём как $M/\rho_2 = 285/1{,}2 = 237{,}5$ см^3 — это объём, который занял бы весь пластилин такой массы, если бы кубика не было. Кубик из железа тяжелее пластилина того же объёма, поэтому тот же вес набирается меньшим объёмом: $237{,}5 - 87{,}4 = 150{,}1$ см^3 — как раз $a^3(\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$.

Проверка. Размерность: г/(г/см^3) = см^3. Предел: если плотности равны ($\rho_1 = \rho_2$), кубик не отличается от пластилина, и формула даёт $V = M/\rho_2$, как должно быть. Второй способ — по массам: $\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = 212{,}49 + 72{,}51 = 285$ г, то есть набранная масса сходится с M. Средняя плотность тела $M/V = 285/87{,}4 \approx 3{,}26$ г/см^3 лежит между $\rho_2 = 1{,}2$ и $\rho_1 = 7{,}87$ г/см^3, как и должно быть для смеси.

Физический смысл: кубик составляет $27/87{,}4 \approx 31\,\%$ объёма, но $212{,}5/285 \approx 75\,\%$ массы.

Ответ. $V = \dfrac{M}{\rho_2} - a^3\dfrac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \approx 87{,}4$ см^3.