Вода в трубках разного сечения

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 7 класс, задача 5] «Вода в трубках разного сечения».

Вода течёт по двум соединяющимся трубкам с площадями сечений S и $3S$ со скоростями v и $2v$ и втекает в одну выходную трубу. Скорость воды в выходной трубе — $4v$. Найти площадь поперечного сечения выходной трубы S_1.

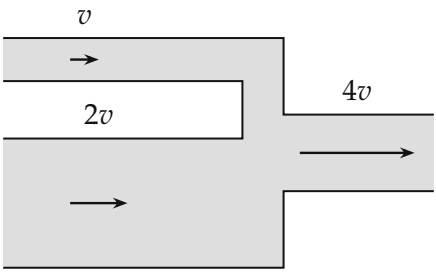


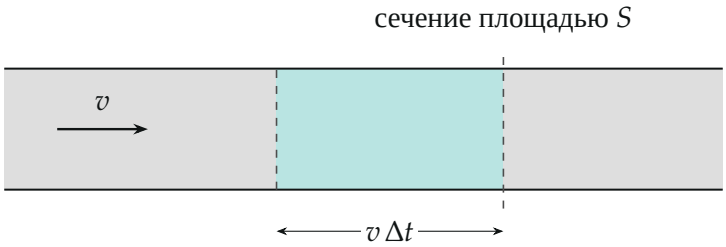
Рисунок из условия; сечения труб показаны по условию $S : 3S = 1 : 3$ (в оригинале нарисованы не в масштабе), длины стрелок пропорциональны скоростям $v : 2v : 4v$

▲ **Решение. Что происходит.** Вода несжимаема, и в трубах нет утечек, поэтому в месте слияния она не копится: сколько воды втекает в него за какое-то время, столько же и вытекает. Главная идея: сравнить объёмы воды, которые за один и тот же малый промежуток времени Δt проходят через сечения входных труб и через сечение выходной трубы.

Обозначения. ρ — плотность воды (не меняется), Δt — малый промежуток времени, S_1 — искомая площадь сечения выходной трубы. Скорость воды считаем одинаковой по всему сечению, как и дано в условии.

1. Какой объём воды проходит через сечение. Рассмотрим трубу площадью сечения S, по которой вода течёт со скоростью v. За время Δt каждая частица воды смещается на $v\,\Delta t$. Поэтому через выбранное сечение за это время пройдут те частицы, которые были от него не дальше, чем $v\,\Delta t$: это цилиндр с основанием S и длиной $v\,\Delta t$. Его объём и масса

$$V = S\,v\,\Delta t, \qquad m = \rho\,S\,v\,\Delta t.$$



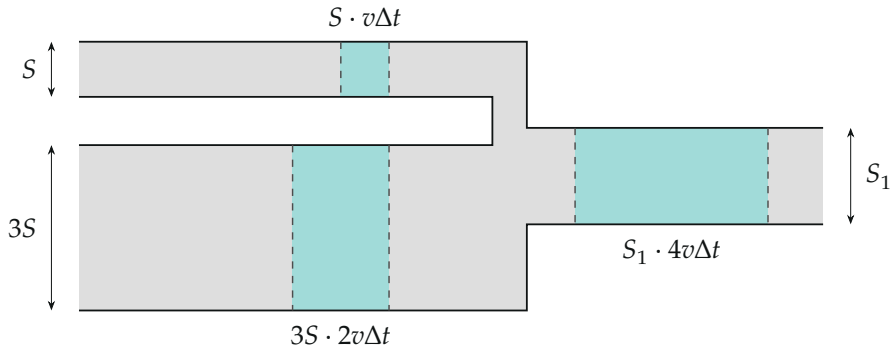
Объём воды, прошедшей через сечение за Δt: тёмный цилиндр длиной $v\,\Delta t$ (длина стрелки $\vec{v}$ показывает скорость)

2. Закон сохранения массы для участка слияния. Выделим участок воды между сечениями двух входных труб и сечением выходной трубы (пунктир на рисунке). Плотность воды и объём этого участка не меняются, значит, и масса воды в нём постоянна, хотя вода течёт: за любой промежуток Δt втекающая масса равна вытекающей. Втекает вода по двум трубам:

$$m_{\text{втек}} = \rho S v\,\Delta t + \rho \cdot 3S \cdot 2v\,\Delta t = 7\rho S v\,\Delta t,$$

а вытекает по одной:

$$m_{\text{вытек}} = \rho S_1 \cdot 4v\,\Delta t.$$

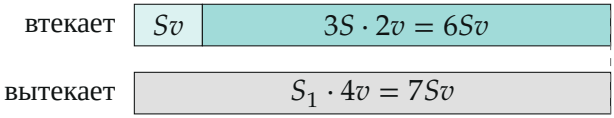


Объёмы воды, которая пройдёт через сечения за Δt (тёмные участки): два входных в сумме равны выходному; рисунок выполнен в масштабе при $S_1 = 7S/4$

3. Приравниваем. Массы равны, плотность и Δt сокращаются:

$$7\,\rho\,S\,v\,\Delta t = \rho\,S_1 \cdot 4v\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{7}{4}\,S.$$

Обратите внимание: площадь выходной трубы не равна сумме площадей входных ($S + 3S = 4S$): складываются не площади, а потоки — произведения площади на скорость. В выходной трубе вода течёт быстрее, чем в большей входной, поэтому и сечение нужно меньше суммы.



Потоки в единицах $S\,v$ (за одно и то же время): в сумме втекает $1 + 6 = 7$, и столько же должно вытечь, откуда $4S_1 = 7S$

Проверка и второй способ. Размерность: $S\,v\,\Delta t$ — это $\text{м}^2 \cdot \text{м/с} \cdot \text{с} = \text{м}^3$, объём; обе стороны равенства имеют одну размерность. Второй способ — в числах: пусть $S = 4$ см^2, $v = 1$ см/с. Во входных трубах расходы $4 \cdot 1 = 4$ см^3/с и $12 \cdot 2 = 24$ см^3/с, всего 28 см^3/с; в выходной трубе с $v_{\text{вых}} = 4$ см/с такой расход получается при $S_1 = 28/4 = 7$ см^2, то есть $7S/4 = 7$ см^2 — то же.

Физический смысл: выходная труба шире узкой входной, но уже суммарного сечения: быстрая вода пропускает тот же объём через меньшее сечение.

Ответ. $S_1 = \dfrac{7}{4}\,S.$