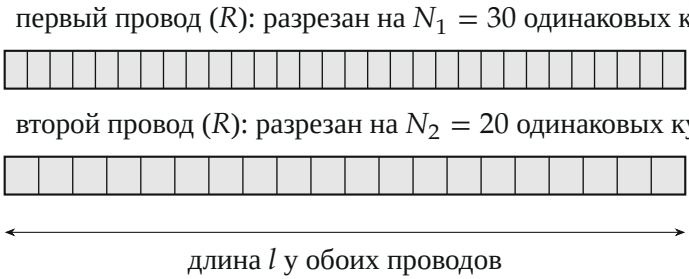
# Жгуты из кусков провода

**Задача 1.** [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, задача 1] Имеется два одинаковых металлических провода, изготовленных из одного и того же металла. Один из них разрезали на $N_1 = 30$ одинаковых кусков, второй — на $N_2 = 20$ одинаковых кусков. Затем одинаковые куски соединили своими концами, образовав два проволочных жгута. Затем жгуты соединили последовательно и подключили к получившейся цепи электрическое напряжение. Определить отношение $P_1/P_2$ мощностей тока в жгутах.




*Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): два одинаковых провода длины $l$, разрезанные на 30 и 20 равных кусков. Затем из кусков каждого провода собирают жгут: все левые концы соединяют вместе, все правые — вместе.*

▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление провода пропорционально длине и обратно пропорционально сечению. Разрезав провод на $N$ кусков, мы получаем куски в $N$ раз короче — сопротивление каждого в $N$ раз меньше. Соединив $N$ таких кусков концами в жгут, мы включаем их параллельно: в жгуте ток идёт по $N$ путям сразу, и сопротивление жгута ещё в $N$ раз меньше сопротивления одного куска. Итого сопротивление жгута в $N^2$ раз меньше сопротивления целого провода. Жгуты включены последовательно, ток через них общий, и мощность $I^2R$ у каждого пропорциональна его сопротивлению.

**Обозначения.** $R$ — сопротивление каждого целого провода (провода одинаковые: та же длина, то же сечение, тот же металл); $r_1$, $r_2$ — сопротивления куска первого и второго проводов; $R_1$, $R_2$ — сопротивления

первого и второго жгутов; $I$ — ток через жгуты; $P_1$, $P_2$ — мощности в них. Сопротивлением мест соединений кусков пренебрегаем.

**1. Сопротивление куска.** Провод длины $l$ и сечения $S$ из металла с удельным сопротивлением $\rho$ имеет $R = \rho l/S$. Кусок длины $l/N$ с тем же сечением:

$$r = \rho\frac{l/N}{S} = \frac{R}{N}, \qquad r_1 = \frac{R}{30}, \quad r_2 = \frac{R}{20}.$$

**2. Сопротивление жгута.** Все $N$ кусков соединены параллельно (общие левые концы и общие правые), одинаковые резисторы: проводимости складываются, $1/R_{ж} = N \cdot (1/r)$. Поэтому

$$R_{ж} = \frac{r}{N} = \frac{R}{N^2}, \qquad R_1 = \frac{R}{900}, \quad R_2 = \frac{R}{400}.$$

Это же видно геометрически: жгут — провод в $N$ раз короче и с сечением в $N$ раз больше, то есть $\rho\,\dfrac{l/N}{NS} = R/N^2$.



провод: $l$, $S$, $R = \rho l/S$



жгут 1: длина $l/30$, сечение $30\,S$

$$R_1 = \rho\,\frac{l/30}{30\,S} = \frac{R}{900}$$



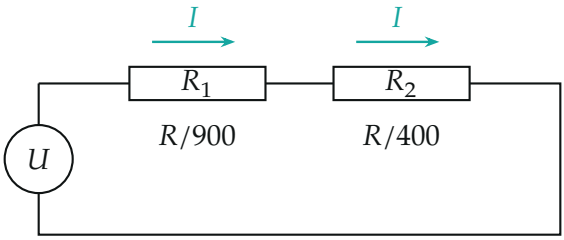
жгут 2: длина $l/20$, сечение $20\,S$

$$R_2 = \rho\,\frac{l/20}{20\,S} = \frac{R}{400}$$

*Жгут как провод: из куска в $N$ раз короче и в $N$ раз «толще» (сечение $NS$) получается сопротивление $R/N^2$. Высота прямоугольников — сечение ($S = 0{,}07$ см), ширина — длина (в масштабе провода 4,5 см).*

**3. Мощности.** Жгуты соединены последовательно с источником, поэтому ток через них один и тот же, $I$. Мощность тока в жгуте $P = I^2 R_{ж}$:

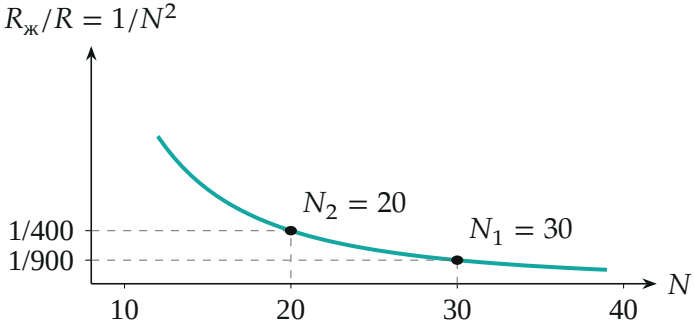
$$P_1 = I^2 R_1, \qquad P_2 = I^2 R_2.$$




*Цепь: источник $U$ и два жгута $R_1$ и $R_2$ последовательно; ток $I$ общий. Напряжения на жгутах относятся как $R_1 : R_2 = 4 : 9$.*

**4. Отношение.** Квадрат тока сокращается:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I^2 R_1}{I^2 R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R/N_1^2}{R/N_2^2} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{20^2}{30^2} = \frac{400}{900} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$




*Сопротивление жгута $R_{ж}/R = 1/N^2$ в зависимости от числа кусков. Точки: $N_2 = 20$ (1/400) и $N_1 = 30$ (1/900). Жгут из большего числа кусков — меньшего сопротивления, мощность в нём при том же токе меньше.*

**5. Второй способ — через напряжения.** Ток $I$ общий, поэтому напряжения на жгутах относятся как их сопротивления: $U_1 : U_2 = R_1 :$

$R_2 = 4 : 9$, и $U_1 = \frac{4}{13}U$, $U_2 = \frac{9}{13}U$. Мощность $P = IU$, так что $P_1 : P_2 = U_1 : U_2 = 4 : 9$ — то же самое.

| $P_1 = 4P/13$ | $P_2 = 9P/13$ |
|---|---|

отношение $P_1/P_2 = 4/9 \approx 0{,}44$

*Мощности в последовательных жгутах делят общую мощность $P = P_1 + P_2$ в отношении сопротивлений:* $4 : 9$.

**Обратите внимание.** При последовательном соединении мощность больше у того элемента, сопротивление которого больше, — у жгута из 20 кусков. Для параллельного включения жгутов было бы наоборот ($P \propto 1/R$): отношение стало бы $9/4$. Здесь соединение последовательное, ответ меньше единицы.

**Проверка.** Размерность: отношение мощностей безразмерно. Предел: при $N_1 = N_2$ получаем $P_1/P_2 = 1$ — одинаковые жгуты, одинаковые мощности. Знак: $N_1 > N_2$ — сопротивление первого жгута меньше, значит и мощность меньше ($4/9 < 1$). Число: $R_1/R_2 = 400/900$ — верно.

Смысл такой: чем больше кусков, тем более «толстым» и коротким оказывается жгут, тем меньше его сопротивление и тем меньшая доля мощности ему достаётся при общем токе.

**Ответ.** $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{N_2^2}{N_1^2} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}44.$