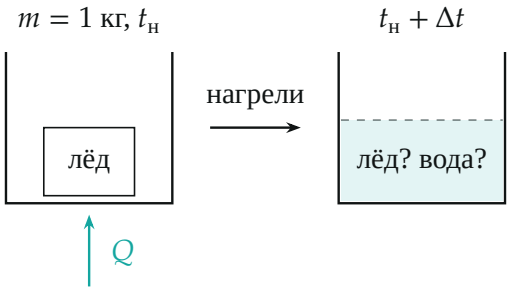
Лёд в калориметре

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, площадка 1, задача 3] В калориметр положили кусок льда массой $m = 1$ кг и сообщили калориметру некоторое количество теплоты Q. В результате температура содержимого калориметра увеличилась на $\Delta t = 20\,^\circ\text{C}$. Найти, в каких пределах может находиться величина Q в зависимости от первоначальной температуры льда. Удельная теплоёмкость воды равна $c_\text{в} = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплоёмкость льда — $c_\text{л} = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 3{,}30 \cdot 10^5$ Дж/кг. Температура плавления льда $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$.



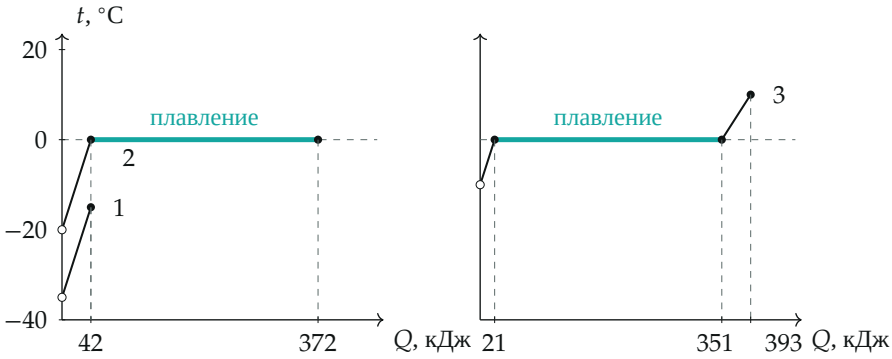
Поясняющий рисунок: калориметру сообщили теплоту Q, температура содержимого выросла на $\Delta t = 20\,^\circ\text{C}$; что стало со льдом — лёд, смесь или вода — зависит от $t_н$

▲ **Решение. Что происходит.** Лёд получает теплоту Q и нагревается на Δt. Лёд ниже $0\,^\circ\text{C}$ только греется; при $0\,^\circ\text{C}$ он плавится, и температура не растёт, пока не растаял весь лёд; потом греется вода. Значит, из каких частей складывается Q, зависит от того, где лёд оказался в конце. Главная идея: конечная температура $t_\text{н} + \Delta t$ определяется начальной, и по ней видно, в каком состоянии содержимое калориметра, а значит, чему равна Q. Класс задачи — тепловой баланс с фазовым переходом.

Обозначения. $t_\text{н} \le 0\,^\circ\text{C}$ — начальная температура льда (льда теплее $0\,^\circ\text{C}$ не бывает); $t_\text{к} = t_\text{н} + \Delta t$ — конечная температура. Теплоёмкость калориметра и потери в условии не заданы, поэтому вся теплота Q идёт

на содержимое. Три величины, которые понадобятся (в килоджоулях): $c_л m\Delta t = 42$, $\lambda m = 330$, $c_в m\Delta t = 84$.

Качественная картина. Нарисуем, как греется лёд при разных $t_н$: по горизонтали — сообщённая теплота, по вертикали — температура. Чем холоднее лёд в начале, тем дольше он греется, не дойдя до 0 °C. Пока лёд плавится, температура стоит на 0 °C — на графике полка длиной λm.



*Нагрев льда массой 1 кг на 20 °C до конечной точки (кривые идут от пустого кружка к чёрной точке): **1** — $t_н = -35$ °C, **2** — $t_н = -20$ °C, **3** — $t_н = -10$ °C. Бирюзовая полка — плавление при 0 °C; в случае **2** конец может быть в любой её точке*

1. Лёд не доходит до плавления: $t_н < -20$ °C. Конечная температура $t_к < 0$ °C, лёд остаётся льдом, фазового перехода нет. Для нагревания без перехода $Q = cm\Delta t$, поэтому

$$Q_1 = c_л m\Delta t = 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 20 = 4{,}2 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 42 \text{ кДж}.$$

От $t_н$ эта величина не зависит.

2. Лёд доходит ровно до 0 °C: $t_н = -20$ °C. Сначала лёд нагревается до 0 °C и получает $c_л m\Delta t = 42$ кДж. Конечная температура равна 0 °C при любой доле растаявшего льда: пока лёд плавится, температура смеси льда и воды не меняется. Условие эту долю не задаёт, поэтому теплота на плавление — любая от нуля (ничего не растаяло) до λm (растаяло

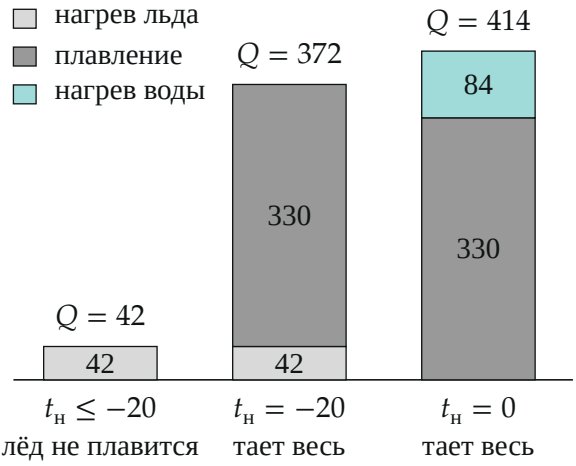
всё):

$$c_л m\Delta t \le Q_2 \le c_л m\Delta t + \lambda m, \qquad 42\text{ кДж} \le Q_2 \le 372\text{ кДж}.$$

3. Лёд тает целиком: $-20\,^\circ\text{C} < t_н \le 0\,^\circ\text{C}$. Теперь $t_к = t_н + \Delta t > 0\,^\circ\text{C}$, значит, весь лёд растаял и получившаяся вода нагрелась. Три стадии: нагрев льда от $t_н$ до $0\,^\circ\text{C}$, плавление, нагрев воды от $0\,^\circ\text{C}$ до $t_н + \Delta t$:

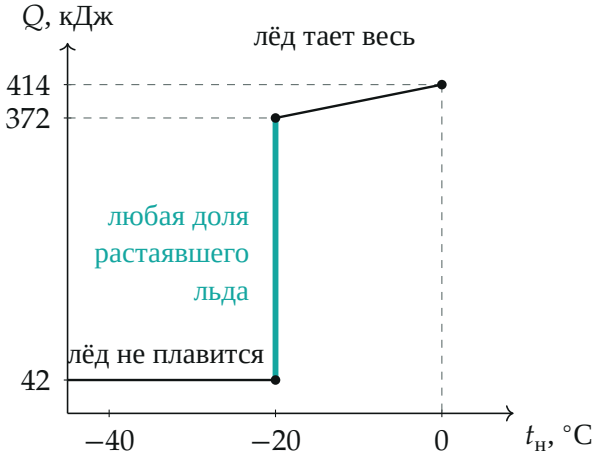
$$Q_3 = c_л m\,(0 - t_н) + \lambda m + c_в m\,(t_н + \Delta t - 0) = c_в m\Delta t + \lambda m + (c_в - c_л)\,m\,t_н.$$

В килоджоулях при $t_н$ в градусах: $Q_3 = 414 + 2{,}1\,t_н$. Так как $c_в > c_л$, Q_3 растёт вместе с $t_н$: чем теплее исходный лёд, тем меньше его греть до $0\,^\circ\text{C}$, но тем больше градусов приходится на воду, у которой теплоёмкость вдвое больше. На границах: $t_н = -20\,^\circ\text{C}$ даёт 372 кДж, $t_н = 0\,^\circ\text{C}$ даёт 414 кДж, то есть $372\text{ кДж} < Q_3 \le 414\text{ кДж}$.



Из чего складывается теплота в трёх граничных случаях, кДж

4. Собираем три случая. Значения Q идут без разрывов: $Q_1 = 42$ в случае 1, весь отрезок от 42 до 372 в случае 2 и промежуток от 372 до 414 в случае 3. Все они вместе заполняют отрезок от 42 до 414 кДж.



Теплота Q в зависимости от начальной температуры льда: до $-20\,^\circ C$ она постоянна, при $-20\,^\circ C$ принимает любое значение от 42 до 372 кДж, выше — растёт от 372 до 414 кДж. Все значения от 42 до 414 кДж достижимы

Обратите внимание: при $t_н = -20\,^\circ C$ температура $0\,^\circ C$ ещё ничего не говорит о доле растаявшего льда, и именно этот случай даёт скачок Q от 42 до 372 кДж, закрытый вертикальным отрезком на графике. Если считать, что при $t_н = -20\,^\circ C$ лёд обязательно тает весь (или не тает совсем), получится неверный диапазон.

Проверка. Крайние значения достижимы: 42 кДж — лёд, нагретый с $t_н \le -20\,^\circ C$ без плавления, 414 кДж — лёд при $0\,^\circ C$, растаявший и нагретый до $20\,^\circ C$. Меньше 42 нельзя: лёд на $20\,^\circ C$ без фазового перехода греют ровно на $c_л m\Delta t$, а переход только добавляет теплоту. Больше 414 нельзя: самый тёплый лёд — при $0\,^\circ C$. Предельный случай $\lambda \to 0$ даёт диапазон $c_л m\Delta t \le Q \le c_в m\Delta t$: от нагрева льда до нагрева воды. Числовой пример: $t_н = -10\,^\circ C$ даёт $21 + 330 + 42 = 393$ кДж, это внутри диапазона. Размерность: $cm\Delta t$ и λm — джоули. Смысл: ширина диапазона почти целиком — теплота плавления: она появляется или не появляется в зависимости от того, лёд какой температуры взяли.

Ответ. $c_л m\Delta t \le Q \le c_в m\Delta t + \lambda m$, то есть $4{,}2 \cdot 10^4$ Дж $\le Q \le 41{,}4 \cdot 10^4$ Дж (от 42 до 414 кДж).