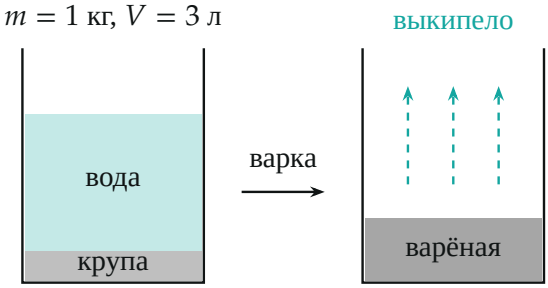
Выкипевшая вода из перловки

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, площадка 1, задача 4] Массу $m = 1$ кг перловой крупы залили водой объёмом $V = 3$ л и сварили. В результате получилась варёная перловка, а часть воды выкипела. Считая, что вода либо выкипает, либо впитывается в перловку, целиком расходуясь на увеличение объёма зерна, найти объём выкипевшей воды, если известно, что плотность сухого перлового зерна $\rho_с = 1400$ кг/м^3, варёного — $\rho_в = 1200$ кг/м^3, воды — $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок (высоты — в масштабе объёмов): крупа и вода до варки; после варки вся вода либо впиталась в зерно, либо выкипела

▲ **Решение. Что происходит.** Крупа при варке впитывает воду и разбухает. Вся налитая вода делится на две части: впитавшуюся, которая остаётся в зерне, и выкипевшую, которая ушла паром. Главная идея: масса и объём варёной крупы выражаются через одну неизвестную — объём впитавшейся воды v, а плотность варёной крупы, отношение этих двух величин, известна. Класс задачи — плотность смеси: складываются массы и объёмы, но не плотности.

Обозначения. v — объём впитавшейся воды, V_1 — объём выкипевшей воды, $V_к = m/\rho_с$ — объём сухой крупы. Условие говорит: вода целиком идёт на увеличение объёма зерна, значит, объём варёной крупы равен объёму сухой плюс объём впитавшейся воды.

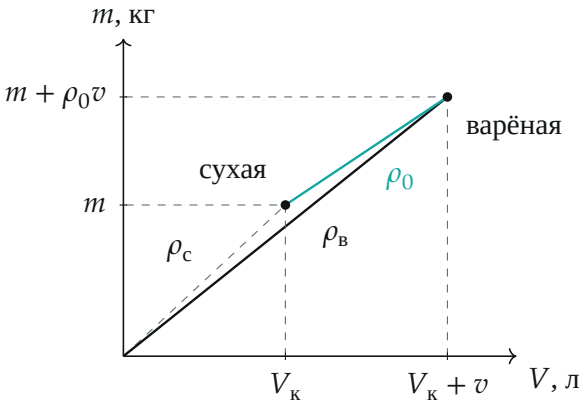
1. Масса и объём варёной крупы. Масса сохраняется: к массе крупы

прибавилась масса впитавшейся воды $\rho_0 v$. Объём — по условию $V_к + v$:

$$M_в = m + \rho_0 v, \qquad V_в = \frac{m}{\rho_с} + v.$$

Плотность варёной крупы по определению — масса, делённая на объём:

$$\rho_в = \frac{M_в}{V_в} = \frac{m + \rho_0 v}{\frac{m}{\rho_с} + v}.$$



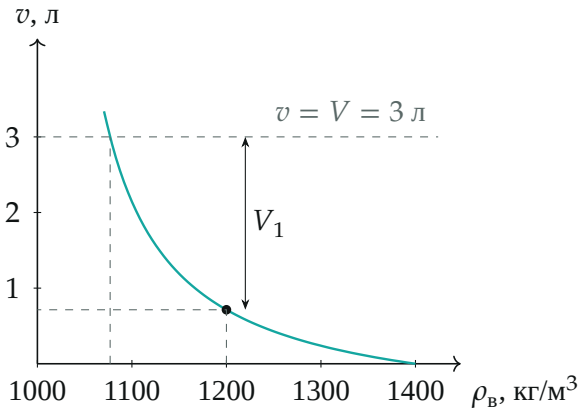
Масса и объём зерна: наклон луча из начала координат — плотность. Сухая крупа ($\rho_с$, точка слева) при добавлении воды движется по бирюзовому отрезку с наклоном ρ_0 и останавливается там, где наклон луча равен $\rho_в$ (точка справа)

2. Объём впитавшейся воды. Неизвестным осталось только v. Умножим на знаменатель и соберём члены с v в одной части:

$$\rho_в \frac{m}{\rho_с} + \rho_в v = m + \rho_0 v \quad \Rightarrow \quad v\,(\rho_в - \rho_0) = m\Big(1 - \frac{\rho_в}{\rho_с}\Big),$$

$$v = \frac{m\,(\rho_с - \rho_в)}{\rho_с\,(\rho_в - \rho_0)} = \frac{1 \cdot (1400 - 1200)}{1400 \cdot (1200 - 1000)}\ \text{м}^3 = \frac{1}{1400}\ \text{м}^3 \approx 0{,}71\ \text{л}.$$

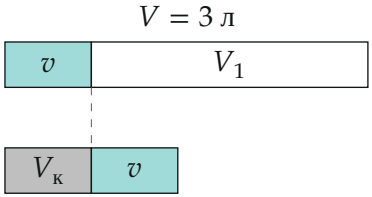
На графике это та же задача: из точки «сухая крупа» вода ведёт отрезок с наклоном ρ_0, пока наклон луча из начала координат не станет $\rho_в$.



Объём впитавшейся воды в зависимости от плотности варёной крупы (при $m = 1$ кг): при $\rho_в = 1200$ кг/м^3 впитывается $v \approx 0{,}71$ л, остальные $V_1 = V - v \approx 2{,}29$ л выкипают. Левее штриховой линии ($\rho_в \approx 1077$ кг/м^3) вся вода впиталась бы, и V_1 было бы равно нулю

3. Выкипевшая вода. Вся вода впиталась или выкипела, поэтому $V = v + V_1$. Объём выкипевшей воды

$$V_1 = V - v = V - \frac{m\,(\rho_с - \rho_в)}{\rho_с\,(\rho_в - \rho_0)} = 3\text{ л} - 0{,}714\text{ л} \approx 2{,}29\text{ л}.$$



объём варёной крупы $V_к + v$

Объёмы в масштабе: вся вода $V = 3$ л делится на впитавшуюся $v \approx 0{,}71$ л и выкипевшую $V_1 \approx 2{,}29$ л (вверху); варёная крупа занимает объём сухой крупы $V_к \approx 0{,}71$ л плюс v (внизу)

Обратите внимание: перемножать или складывать плотности нельзя. Складываются массы воды и крупы и (по условию) объёмы воды и зерна, а плотность варёной крупы получается как их отношение.

Проверка. Подставим найденное v в плотность: масса $M_{\text{в}} = 1 + 1000/1400 \approx 1{,}714$ кг, объём $V_{\text{в}} = 2/1400 \approx 1{,}43 \cdot 10^{-3}$ м^3, плотность $\rho_{\text{в}} = 1{,}714/(1{,}43 \cdot 10^{-3}) = 1200$ кг/м^3, как в условии. Пределы: при $\rho_{\text{в}} \to \rho_{\text{с}}$ имеем $v \to 0$ — зерно ничего не впитало; при $\rho_{\text{в}} \to \rho_0$ имеем $v \to \infty$ — зерно стало «как вода». Ответ имеет смысл при $v < V$, то есть при $\rho_{\text{в}} > 1077$ кг/м^3; здесь $1200 > 1077$. Размерность: m/ρ — объём. Смысл: перловка при варке удвоила объём (впиталось столько воды, сколько занимало зерно), и из трёх литров воды выкипело чуть больше двух.

Ответ. $V_1 = V - \dfrac{m\,(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{с}}\,(\rho_{\text{в}} - \rho_0)} \approx 2{,}29$ л.