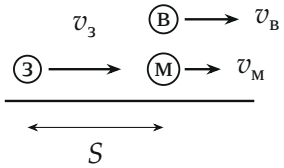
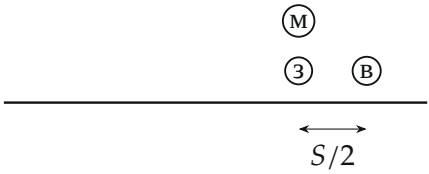
Медведь, Волк и Заяц

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, площадка 1, задача 5] Медведь, Волк и Заяц бегают наперегонки с постоянными скоростями. В некоторый момент времени, когда Медведь и Волк оказались в одной точке, Заяц был позади них на расстоянии S. Через некоторое время после этого Заяц догнал Медведя, а Волк в этот момент оказался впереди них на расстоянии $S/2$. Ещё через некоторое время Заяц догнал Волка. На каком расстоянии позади них в этот момент времени был Медведь?



Момент 0: Медведь и Волк в одной точке, Заяц позади на S (стрелки скоростей — для примера 4, 6, 8 условных единиц)



Первая встреча: Заяц догнал Медведя, Волк впереди них на $S/2$



Вторая встреча: Заяц догнал Волка, Медведь позади них на искомое расстояние Δ

▲ **Решение. Что происходит.** Все три зверя бегут равномерно, поэтому разность любых двух скоростей постоянна, и каждая встреча — это «догонялки» с известной скоростью сближения. Главная идея: перейти в систему отсчёта, связанную с Медведем. В ней Медведь стоит на месте, а искомое расстояние до него — просто координата Зайца в момент встречи с Волком. Класс задачи — относительное движение в одну сторону.

Обозначения. Индексы «м», «в», «з» — Медведь, Волк, Заяц. $v_м$, $v_в$, $v_з$ — скорости в системе земли; $u = v_з - v_м$ и $w = v_в - v_м$ — скорости Зайца и Волка относительно Медведя; t_1 — момент первой встречи (Заяц–Медведь), t_2 — второй (Заяц–Волк); время отсчитываем от момента, когда Медведь и Волк в одной точке. Ось x' в системе Медведя направим по ходу бега, начало — в Медведе.

1. Система отсчёта Медведя. Скорости относительно Медведя равны разностям скоростей: u у Зайца, w у Волка, нуль у Медведя; все движутся вдоль одной прямой в одну сторону. В момент $t = 0$: Медведь и Волк в точке $x' = 0$, Заяц в точке $x' = -S$. Тогда

$$x'_м = 0, \qquad x'_в = wt, \qquad x'_з = -S + ut.$$

2. Первая встреча. Заяц догоняет Медведя, когда $x'_з = 0$: $-S + ut_1 = 0$, то есть $t_1 = S/u$. К этому моменту Волк ушёл от Медведя на $wt_1 = S/2$ (так сказано в условии), откуда

$$w\frac{S}{u} = \frac{S}{2} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{u}{2}.$$

Волк убегает от Медведя вдвое медленнее, чем Заяц к нему приближается.

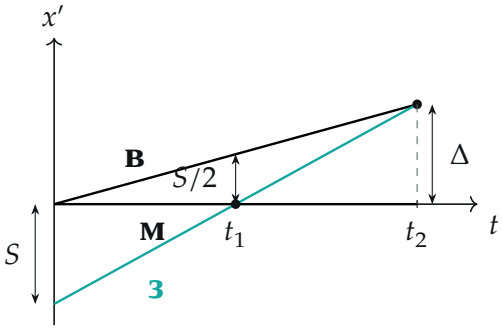
3. Вторая встреча. Заяц догоняет Волка, когда $x'_з = x'_в$:

$$-S + ut_2 = \frac{u}{2}t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2S}{u}.$$

Координата встречи $x' = \dfrac{u}{2}t_2 = S$. Медведь стоит в начале координат,

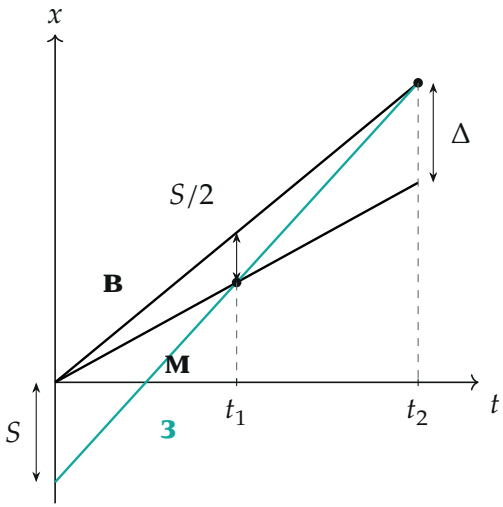
поэтому в этот момент он позади Зайца и Волка на расстояние

$$\Delta = S.$$



То же в системе отсчёта Медведя (вычли $4t$ из каждой координаты): Медведь стоит, Волк уходит со скоростью $u/2$, Заяц идёт со скоростью u

Второй способ: в системе земли. Заяц догоняет Медведя за $t_1 = \dfrac{S}{v_з - v_м}$; за это время Волк уходит от Медведя на $(v_в - v_м)t_1 = \dfrac{S}{2}$, откуда $v_в - v_м = \dfrac{1}{2}(v_з - v_м)$ и $v_з - v_в = \dfrac{1}{2}(v_з - v_м)$. После первой встречи Заяц догоняет Волка (расстояние $S/2$) за $t' = \dfrac{S/2}{v_з - v_в} = \dfrac{S}{v_з - v_м}$ — то же время t_1. За него Заяц уходит от Медведя на $(v_з - v_м)t' = S$ — те же S.



Движение в системе отсчёта земли (для примера $v_м = 4$, $v_в = 6$, $v_з = 8$, $S = 12$): в момент $t_1 = 3$ Заяц на одной высоте с Медведем и Волк впереди на $S/2$, в момент $t_2 = 6$ — с Волком, а Медведь позади на $\Delta = 12 = S$

Обратите внимание: вопрос про расстояние в момент второй встречи, а не в начале: Δ — расстояние от Медведя до точки, где Заяц догнал Волка. И скорости по отдельности искать не нужно — в ответ входит только их отношение $w/u = 1/2$.

Проверка. Пример $v_м = 4$, $v_в = 6$, $v_з = 8$, $S = 12$ (отношение $w/u = 2/4 = 1/2$ выполнено): $t_1 = 12/4 = 3$, Медведь и Заяц в точке 12, Волк в 18, то есть впереди на $6 = S/2$; дальше $t' = 6/(8-6) = 3$, $t_2 = 6$: Заяц и Волк в точке 36, Медведь в 24, позади на $12 = S$. Размерность: расстояние. Смысл: в системе Медведя Заяц проходит два равных отрезка S (от $-S$ до 0 и от 0 до S) за равные времена S/u: Волк вдвое медленнее Зайца, поэтому к моменту первой встречи он на $S/2$ впереди, а ещё через то же время — на S.

Ответ. $\Delta = S$.