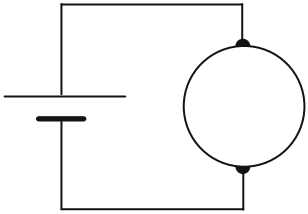
Ток в проводящем шаре

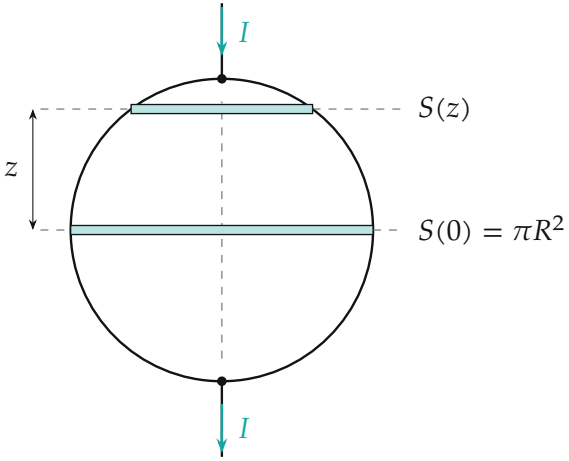
Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, площадка 2, задача 1] Полюса источника тока подключают к противоположным полюсам проводящего сплошного шара.



В каком сечении шара при прохождении электрического тока будет выделяться наибольшая мощность? Ответ обосновать.

▲ **Решение. Что происходит.** Ток входит в шар в одной точке и выходит в противоположной. Через любое сечение, перпендикулярное линии между контактами, проходит весь ток I: заряд внутри шара не накапливается. Но у полюса сечение шара мало, у экватора велико, и ток на пути «сжимается». Главная идея: мысленно разрезать шар на тонкие слои, перпендикулярные току. Слои соединены последовательно, ток во всех один и тот же, и мощность в слое $dP = I^2\,dR$ пропорциональна его сопротивлению. Класс задачи — последовательное соединение: при одном токе мощность тем больше, чем больше сопротивление.

Обозначения. R — радиус шара; ρ — удельное сопротивление вещества шара (шар однородный); z — расстояние от плоскости экватора вдоль линии контактов; dz — толщина слоя; $S(z)$ — площадь слоя; $p(z) = dP/dz$ — мощность на единицу толщины слоя.



Шар, разрезанный на тонкие слои перпендикулярно току: через каждый слой течёт весь ток I, а площадь слоя $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ у полюса мала, у экватора наибольшая

1. Площадь слоя. Слой на высоте z — круг, радиус которого $\sqrt{R^2 - z^2}$ (теорема Пифагора для сечения шара):

$$S(z) = \pi\,(R^2 - z^2).$$

У экватора $S = \pi R^2$, к полюсу $S \to 0$.

2. Сопротивление слоя. Тонкий слой длины dz и площади S имеет сопротивление, пропорциональное длине и обратно пропорциональное площади:

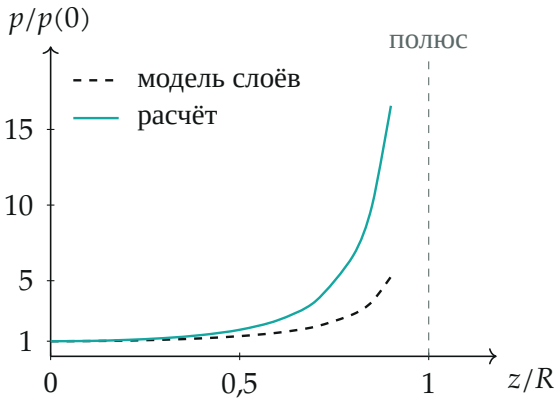
$$dR = \rho\,\frac{dz}{S(z)} = \frac{\rho\,dz}{\pi\,(R^2 - z^2)}.$$

Самое большое сопротивление имеют слои с самой малой площадью, то есть у полюсов.

3. Мощность слоя. Слои соединены последовательно, ток во всех слоях один, поэтому мощность в слое $dP = I^2 dR$, а на единицу толщины

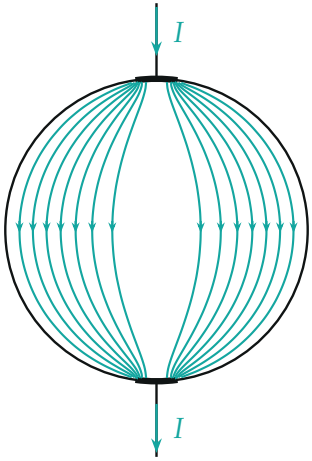
$$p(z) = \frac{dP}{dz} = \frac{\rho I^2}{\pi\,(R^2 - z^2)}.$$

Эта величина наименьшая на экваторе, $p(0) = \dfrac{\rho I^2}{\pi R^2}$, и растёт симметрично к обоим полюсам: $p \to \infty$ при $z \to \pm R$.



Мощность на единицу толщины слоя $p(z)$ в долях значения на экваторе: штриховая — модель слоёв, $1/(1 - z^2/R^2)$; бирюзовая — численный расчёт шара с контактами малого размера. Оба графика растут к полюсу, расчёт — ещё круче

4. Вывод. Больше всего мощности выделяется в слоях у полюсов шара, около точек присоединения проводов, где площадь сечения наименьшая. Бесконечное значение p при $z \to R$ говорит только о том, что у реальных контактов конечных размеров мощность максимальна в слое вплотную к контакту.



Линии тока в проводящем шаре (численный расчёт; контакты — небольшие площадки у полюсов): все линии сходятся к контактам, ток там сгущается

Обратите внимание: ток через каждое сечение один, а плотность тока $j = I/S$ различна, и плотность тепловой мощности ρj^2 растёт к полюсу как $1/S^2$. Модель слоёв считает ток равномерным по сечению, а в настоящем шаре линии тока сгущаются у контактов. Это только усиливает вывод: по неравенству Коши — Буняковского $\int j^2\,dA \geq I^2/S$, то есть слой выделяет не меньше, чем даёт формула $p(z)$.

Проверка. Размерность: $[\rho I^2/R^2] = \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^2/\text{м}^2 = \text{Вт}/\text{м}$ — мощность на длину. Предел: у цилиндра с постоянным сечением $S = \text{const}$ мощность на единицу длины всюду одинакова — как и должно быть; здесь S зависит от z, и p вместе с ней. Второй способ: плотность мощности $\rho j^2 = \rho I^2/S^2$ максимальна там, где минимальна S, то есть у полюсов. Численный расчёт подтверждает вывод: на экваторе мощность на единицу толщины в 1,05 раза выше оценки по модели $\rho I^2/(\pi R^2)$ (для $\rho = 1$, $R = 1$ получено $0{,}335\,I^2$ вместо $0{,}318\,I^2$), а у полюса — в разы выше. Смысл: чем уже проход для тока, тем «жарче» там.

Ответ. Наибольшая мощность выделяется у полюсов шара, в слоях вплотную к точкам присоединения проводов, где сечение шара наименьшее; на экваторе — наименьшая.