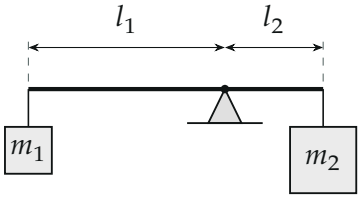
Неравноплечие весы

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, площадка 2, задача 2] Два груза с массами m_1 и m_2 уравновешены на неравноплечих весах ($m_1 < m_2$). Грузы меняют местами, добавляя к грузу m_2 точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу m_1, чтобы равновесие весов восстановилось?



Первый случай: груз m_1 на длинном плече l_1 уравновешивает груз m_2 на коротком плече l_2 (рычаг в равновесии; для рисунка $m_2 = 2m_1$, $l_1 = 2l_2$)

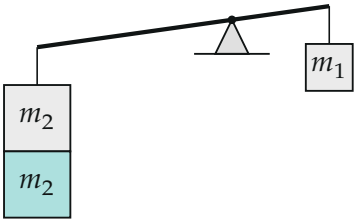
▲ **Решение. Что происходит.** Весы — рычаг: они в равновесии, когда моменты сил тяжести грузов относительно оси равны. Плечи l_1 и l_2 неизвестны, но в оба условия равновесия они входят только отношением, а оно находится из первого условия. Главная идея: записать правило моментов для первого и для второго случая и разделить уравнения — плечи сократятся. Класс задачи — равновесие рычага.

Обозначения. В первом случае груз m_1 висит на плече l_1, груз m_2 — на плече l_2. После обмена на плече l_1 висит m_2 вместе с таким же грузом, то есть масса $2m_2$, на плече l_2 — m_1 с добавкой Δm. Массой самой балки и чашек пренебрегаем (их моменты уравновешены). Ускорение свободного падения g сократится во всех уравнениях.

1. Первое равновесие. Правило моментов: момент силы тяжести слева равен моменту справа,

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 l_1 = m_2 l_2. \qquad (1)$$

Так как $m_1 < m_2$, плечо l_1 длиннее: лёгкий груз висит на длинном плече. Отсюда $l_1/l_2 = m_2/m_1$.



Грузы поменяли местами, к m_2 добавили такой же груз (бирюзовый): левая сторона перевешивает, равновесие нарушено

2. Грузы поменяли. Слева, на длинном плече, теперь $2m_2$, справа, на коротком, — m_1. Момент слева $2m_2 g l_1 = 2m_2^2 g l_2/m_1$ больше момента справа $m_1 g l_2$, потому что $2m_2^2 > m_1^2$. Левая сторона перевешивает — как сказано в условии.

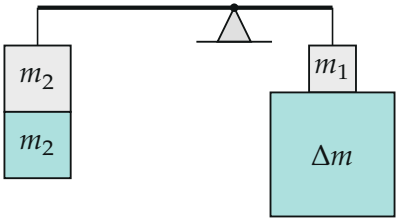
3. Восстановим равновесие. Добавка Δm ложится на правую сторону, на плечо l_2:

$$2m_2 g l_1 = (m_1 + \Delta m)\, g\, l_2. \qquad (2)$$

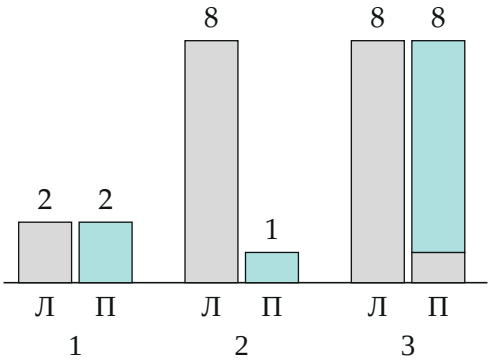
Неизвестным осталось Δm, но в (2) есть ещё плечи. Плечи входят в (2) только отношением l_1/l_2, а оно известно из (1). Выразим из (2) сумму $m_1 + \Delta m$ и подставим $l_1/l_2 = m_2/m_1$:

$$m_1 + \Delta m = 2m_2 \frac{l_1}{l_2} = \frac{2m_2^2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{2m_2^2 - m_1^2}{m_1}.$$

Это то же, что деление (2) на (1) почленно: плечи сокращаются.



К грузу m_1 добавлен Δm (на рисунке для $m_2 = 2m_1$ это $7m_1$): равновесие восстановлено



Моменты сил (в единицах $m_1 l_2 g$ при $m_2 = 2m_1$, $l_1 = 2l_2$) относительно оси: левая (Л) и правая (П) части в трёх случаях. В третьем правая часть — момент m_1 (серый) плюс момент Δm (бирюзовый)

Обратите внимание: «точно такой же груз» добавляют к грузу m_2 — это ещё m_2 (всего $2m_2$), а не m_1 и не Δm. Груз Δm ищут отдельно, и он значительно больше любого из m_1, m_2.

Проверка. Числа: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $l_2 = 1$ дают из (1) $l_1 = 2$; момент слева $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (в единицах g), справа $(1 + \Delta m) \cdot 1$, откуда $\Delta m = 7$, а формула даёт $(2 \cdot 4 - 1)/1 = 7$. Предел: при $m_2 \to m_1$ весы равноплечие ($l_1 = l_2$) и $\Delta m \to m_1$: слева стало $2m_1$, справа $m_1 + \Delta m$ тоже $2m_1$. Знак: $2m_2^2 > m_1^2$, значит $\Delta m > 0$, добавка нужна. Размерность: m^2/m — масса. Смысл: из-за неравных плеч любой груз слева «весит» в m_2/m_1 раз больше, чем такой же справа, поэтому одной добавки массой m_1 мало.

Ответ. $\Delta m = \dfrac{2m_2^2 - m_1^2}{m_1}$.