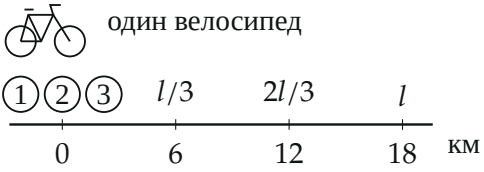
# Трое с одним велосипедом

**Задача 3.** [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, площадка 2, задача 3] Команда из трёх спортсменов должна пройти по определённому маршруту за минимальное время. Длина маршрута $l = 18$ км. Спортсмены могут бежать со скоростью $v = 14$ км/ч, или ехать на велосипеде со скоростью $3v$. При этом на команду полагается только один одноместный велосипед. Предложите стратегию движения на маршруте, обеспечивающую минимальное время его прохождения, и найдите это минимальное время. Время прохождения маршрута командой определяется по последнему пришедшему к финишу спортсмену.




*Поясняющий рисунок: маршрут длиной $l = 18$ км и три спортсмена на старте с одним велосипедом*

▲ **Решение. Что происходит.** Велосипед втрое быстрее бега, но он один и на нём едет только один человек. Время спортсмена зависит от того, сколько километров он проехал: чем больше, тем раньше финиш. Команда приходит по последнему, поэтому выгодно, чтобы велосипеда досталось всем поровну. Главная идея: связать время каждого с длиной его «велосипедной» части, ограничить суммарную длину этих частей длиной маршрута и найти равное распределение. Класс задачи — экстремум при общем ресурсе.

**Обозначения.** $r_i$ — расстояние, которое спортсмен с номером $i$ проехал на велосипеде вперёд, $i = 1, 2, 3$; $T_i$ — его время в пути; $T = \max T_i$ — время команды. Остальные $l - r_i$ он бежит со скоростью $v$.

**1. Время одного спортсмена.** Время на каждом участке — путь, делённый на скорость; бег и езда идут один за другим, поэтому

$$T_i = \frac{l - r_i}{v} + \frac{r_i}{3v} = \frac{l}{v} - \frac{2r_i}{3v}.$$

Чем больше $r_i$, тем меньше $T_i$.

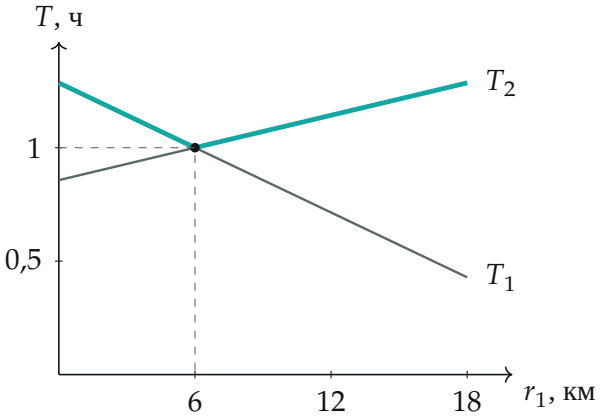
**2. Ограничение на $r_i$.** Велосипед один и всего за маршрут смещается вперёд не больше чем на длину маршрута: от старта он не может уехать дальше финиша. Каждая поездка вперёд на велосипеде — это его смещение, поэтому

$$r_1 + r_2 + r_3 \le l.$$

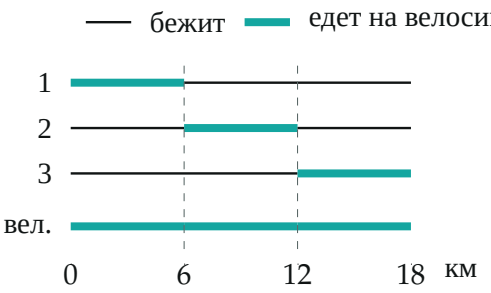
**3. Нижняя граница времени команды.** Время команды определяет тот, у кого $r_i$ меньше всех: у него $T_i$ наибольшее. Наименьшее из трёх чисел не превосходит их среднего, поэтому $r_{\min} \le \dfrac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \le \dfrac{l}{3}$. Отсюда

$$T \ge \frac{l}{v} - \frac{2}{3v} \cdot \frac{l}{3} = \frac{7l}{9v}.$$

Равенство достигается, когда все $r_i$ равны $l/3$: тогда все три времени одинаковы.

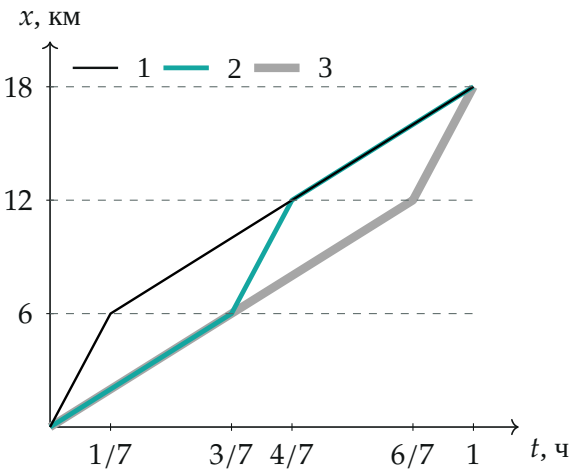



*Время спортсмена, который проезжает $r_1$ км ($T_1$), и спортсменов, делящих остальное поровну ($T_2$); время команды — верхняя из двух линий (бирюзовая), оно минимально при $r_1 = l/3 = 6$ км и равно 1 ч*




*Стратегия: каждый спортсмен проезжает на велосипеде по трети маршрута (по 6 км), остальное бежит; велосипед проходит весь маршрут по частям*

**4. Стратегия, при которой оценка достигается.** Каждый едет $l/3 = 6$ км, бежит $2l/3 = 12$ км. Велосипед передают по эстафете без ожидания: тот, кто едет первым, оставляет велосипед через $l/3$ и бежит дальше; следующий, добежав до велосипеда, едет на нём следующую треть; последний забирает велосипед на $2l/3$. Так велосипед проходит весь маршрут по частям, и никто не ждёт: велосипед оставлен раньше, чем к нему подбежали.




*Положение спортсменов от времени ($v = 14$ км/ч, велосипед 42 км/ч, $l = 18$ км): крутые участки — езда на велосипеде. Все трое финишируют одновременно при $t = 1$ ч; где линии совпадают, спортсмены в одной точке*

Времена: езда $6/42 = \frac{1}{7}$ ч, бег $12/14 = \frac{6}{7}$ ч, итого каждый тратит

$$T = \frac{2l/3}{v} + \frac{l/3}{3v} = \frac{7l}{9v} = \frac{7 \cdot 18}{9 \cdot 14}\ \text{ч} = 1\ \text{ч}.$$

Обратите внимание: ездить на велосипеде назад не выгодно. Если спортсмен проехал назад, его время только растёт: назад он не продвигается и ещё теряет время, а в сумму $r_1 + r_2 + r_3$ такая поездка входит со знаком минус. Поэтому нижняя граница $7l/(9v)$ верна и для таких стратегий, и лучше эстафеты с равными третями нет.

**Проверка.** Размерность: $l/v$ — время. Проверка по спортсменам: первый едет с 0 до 6 км за $1/7$ ч и бежит остальные 12 км до $t = 1/7 + 6/7 = 1$ ч; второй добегает до 6 км за $3/7$ ч, едет до 12 км ещё $1/7$ ч (до $4/7$ ч) и бежит 6 км за $3/7$ ч, то есть до 1 ч; третий бежит 12 км за $6/7$ ч и едет 6 км за $1/7$ ч, то есть до 1 ч. Предел: без велосипеда $T = l/v = 18/14 \approx 1{,}29$ ч, с одним велосипедом — 1 ч. Если бы велосипед был у каждого, было бы $T = l/(3v) \approx 0{,}43$ ч, но тогда $r_i = l$ у всех, и условие $r_1 + r_2 + r_3 \le l$ нарушено. Смысл: велосипед экономит по $\frac{2}{3} r_i/v$, но общий выигрыш ограничен одним проездом трассы.

**Ответ.** Каждый спортсмен бежит $2/3$ маршрута и едет на велосипеде $1/3$ (велосипед передают по эстафете, все финишируют одновременно); минимальное время $t = \dfrac{7l}{9v} = 1$ ч.