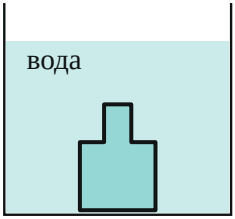
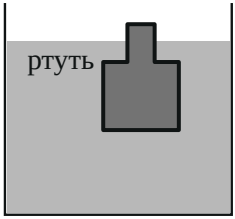
Бутылки с водой и ртутью

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, олимпиада памяти Савельева, задача 1] Имеются две закрытые стеклянные бутылки, одна из которых полностью заполнена водой, вторая ртутью. Первую бутылку опускают в сосуд с водой, вторую — в сосуд с ртутью. Утонут они или нет? Ответ обоснуйте. Для плотностей воды, стекла и ртути справедливы неравенства $\rho_в < \rho_{ст} < \rho_{рт}$.



бутылка с водой



бутылка с ртутью

Поясняющий рисунок: стеклянные бутылки, полностью заполненные водой и ртутью, опущены в сосуды с водой и ртутью. Что с ними будет, надо выяснить (на рисунке показан результат: слева бутылка лежит на дне, справа плавает)

▲ **Решение. Что происходит.** Утонет тело или будет плавать, решает его средняя плотность. Бутылка — составное тело: стекло плюс содержимое, и её средняя плотность лежит между плотностью содержимого и плотностью стекла. Главная идея: сравнить среднюю плотность каждой бутылки с плотностью жидкости, в которую её опустили. Класс задачи — условие плавания тел.

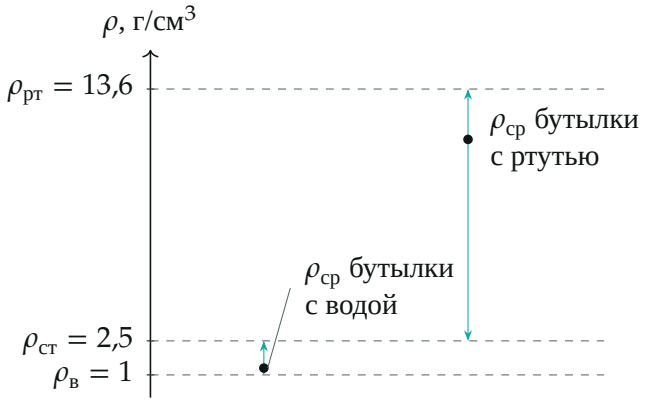
Обозначения. V — полный (внешний) объём бутылки: столько жидкости она вытесняет при полном погружении; $V_{ст}$ — объём стекла; $\varphi = V_{ст}/V$ — доля стекла, $0 < \varphi < 1$; $\rho_с$ — плотность содержимого (воды или ртути). Бутылка закрыта и заполнена целиком, пустот в ней нет, поэтому объём содержимого равен $V - V_{ст}$.

1. Средняя плотность. Масса бутылки — масса стекла плюс масса

содержимого, а средняя плотность — масса, делённая на объём:

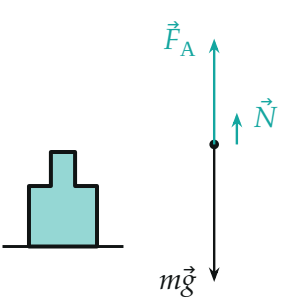
$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\rho_{\text{ст}} V_{\text{ст}} + \rho_{\text{с}}(V - V_{\text{ст}})}{V} = \varphi\,\rho_{\text{ст}} + (1-\varphi)\,\rho_{\text{с}}.$$

Это среднее взвешенное двух плотностей с весами φ и $1-\varphi$, поэтому $\rho_{\text{ср}}$ лежит строго между $\rho_{\text{с}}$ и $\rho_{\text{ст}}$.

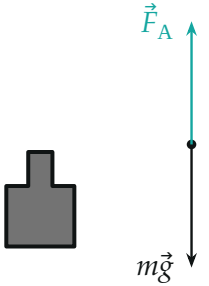


Средняя плотность бутылки лежит между плотностью содержимого и плотностью стекла. Бутылка с водой (слева, пример 1,3 г/см³) плотнее воды — тонет; бутылка с ртутью (справа, пример 11,4 г/см³) менее плотна, чем ртуть, — плавает

2. Условие плавания. При полном погружении на бутылку действует сила Архимеда $F_{\text{А}} = \rho_{\text{ж}} g V$ ($\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости вокруг), вес бутылки $mg = \rho_{\text{ср}} g V$. Если $\rho_{\text{ср}} > \rho_{\text{ж}}$, вес больше силы Архимеда, и бутылка тонет; если $\rho_{\text{ср}} < \rho_{\text{ж}}$, бутылка всплывает и плавает, погрузившись на долю $\rho_{\text{ср}}/\rho_{\text{ж}} < 1$ своего объёма, при которой сила Архимеда уравновесит вес.



в воде: $\rho_{ср} > \rho_в$



в ртути: $\rho_{ср} < \rho_{рт}$

Силы на бутылку (стрелки из одной точки для наглядности; для примера $\rho_{ст} = 2{,}5$ г/см^3 и доля стекла 20%). Слева: $mg = 1{,}3\rho_в gV > F_A = \rho_в gV$, остаток $N = 0{,}3\rho_в gV$ держит дно. Справа: $mg = F_A$, бутылка плавает; длины стрелок в каждой половине — по модулю, масштаб половин разный

3. Бутылка с водой в воде. Содержимое — вода, $\rho_с = \rho_в$ и $\rho_{ср} = \varphi\rho_{ст} + (1 - \varphi)\rho_в$. Вычтем плотность воды:

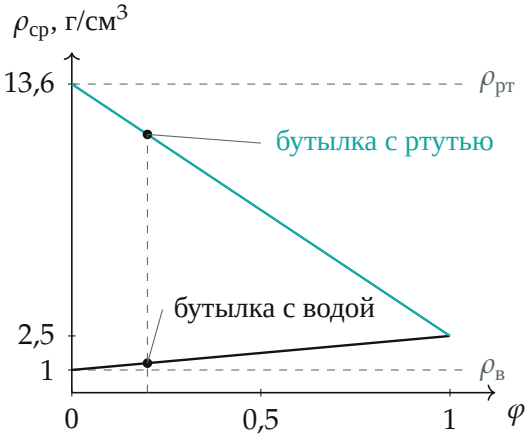
$$\rho_{ср} - \rho_в = \varphi\,(\rho_{ст} - \rho_в) > 0,$$

потому что $\rho_{ст} > \rho_в$. Средняя плотность больше плотности воды — бутылка *утонет* и ляжет на дно.

4. Бутылка с ртутью в ртути. Теперь $\rho_с = \rho_{рт}$, $\rho_{ср} = \varphi\rho_{ст} + (1 - \varphi)\rho_{рт}$:

$$\rho_{ср} - \rho_{рт} = -\varphi\,(\rho_{рт} - \rho_{ст}) < 0,$$

потому что $\rho_{рт} > \rho_{ст}$. Средняя плотность меньше плотности ртути — бутылка *не утонет*, будет *плавать* с частью над поверхностью.



Средняя плотность бутылки от доли объёма стекла $\varphi = V_{ст}/V$. Бутылка с водой (чёрная прямая) выше плотности воды при любом $\varphi > 0$, бутылка с ртутью (бирюзовая) ниже плотности ртути при любом $\varphi > 0$; точки — пример $\varphi = 0{,}2$

Обратите внимание: «стеклянная бутылка» не значит «тонет везде». Всё решает сравнение плотности стекла с жидкостью: стекло тяжелее воды, но легче ртути. Вес бутылки и размеры знать не нужно — в ответ они не входят.

Проверка. Второй способ, без формул. Заменим стекло такой же по объёму жидкостью — получим тело из одной жидкости. Оно в этой жидкости безразлично: ни тонет, ни всплывает. Теперь вернём стекло. В воде стекло плотнее воды, тело тяжелее безразличного и тонет. В ртути стекло легче ртути, тело легче безразличного и всплывает. Это тот же результат. Числа: для $\rho_{ст} = 2{,}5$ г/см^3, $\rho_в = 1$, $\rho_{рт} = 13{,}6$, $\varphi = 0{,}2$ получим $\rho_{ср} = 1{,}3 > 1$ у бутылки с водой и $\rho_{ср} = 11{,}38 < 13{,}6$ у бутылки с ртутью, она погружена на $11{,}38/13{,}6 \approx 84\%$. Предельные случаи: при $\varphi \to 0$ (тонкое стекло) $\rho_{ср} \to \rho_с$, бутылка с водой тонет на грани, бутылка с ртутью почти полностью погружена; при $\varphi \to 1$ (цельное стекло) $\rho_{ср} \to \rho_{ст}$: в воде тонет, в ртути плавает.

Ответ. Бутылка с водой утонет ($\rho_{ср} > \rho_в$), бутылка с ртутью плавать будет ($\rho_{ср} < \rho_{рт}$).