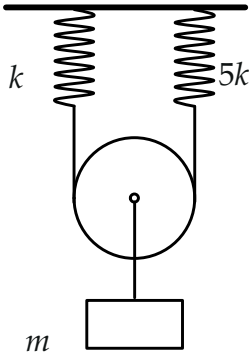
Груз на блоке и двух пружинах

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, олимпиада памяти Савельева, задача 3] К оси невесомого блока прикрепили тело массой m, а сам блок подвесили к потолку с помощью веревки, концы которой прикреплены к двум пружинам с жёсткостью k и $5k$ (см. рисунок). На сколько сместится груз при растяжении пружин?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Груз тянет блок вниз, нить под блоком делит нагрузку между двумя ветвями, и пружины растягиваются. Блок невесомый и вращается без трения, поэтому обе ветви нити натянуты одинаково, и обе пружины растягиваются одной и той же силой — мягкая пружина сильнее жёсткой. Главная идея: сначала силы (равновесие груза и блока), потом удлинения пружин по закону Гука, потом геометрия: длина нити постоянна, поэтому блок опускается на среднее арифметическое удлинений. Класс задачи — равновесие с невесомым блоком и связь перемещений через нерастяжимую нить.

Обозначения. T — натяжение нити, на которой висит груз (в нашей схеме — сила, с которой ось блока связана с грузом); T_1 — натяжение каждой из двух ветвей нити, идущих к пружинам; x_1, x_2 — удлинения пружин k и $5k$; Δx — смещение груза вниз. Нить нерастяжима, блок и нить невесомы.

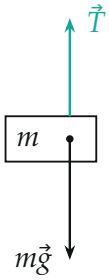
1. Равновесие груза. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и сила $\vec{T}$ вверх. Ускорения нет:

$$T - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg.$$

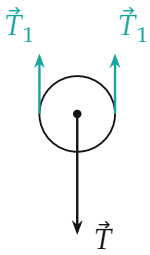
2. Равновесие блока. На невесомый блок действуют: сила T вниз (от груза через ось) и две силы натяжения T_1 вверх от ветвей нити. Силы равны нулю в сумме, поэтому

$$2T_1 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{T}{2} = \frac{mg}{2}.$$

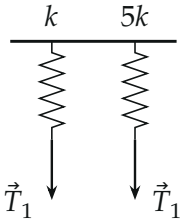
Натяжения ветвей одинаковы: блок невесомый и вращается без трения, значит, суммарный момент сил, действующих на него, равен нулю, а этого с одним плечом (радиусом блока) можно добиться только равными силами T_1 слева и справа. Поэтому пружины тянет одна и та же сила $mg/2$.



груз



блок

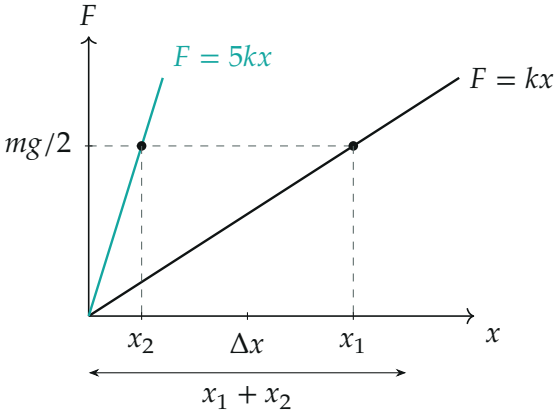


пружины

Силы в равновесии: на груз $T = mg$; на невесомый блок $2T_1 = T$; пружины тянет одна и та же сила $T_1 = mg/2$ (стрелки в масштабе 1,6 см на mg; у пружин показаны силы T_1, с которыми нить тянет их свободные концы)

3. Удлинения пружин. Закон Гука: сила упругости равна жёсткости, умноженной на удлинение. Для пружины k и пружины $5k$

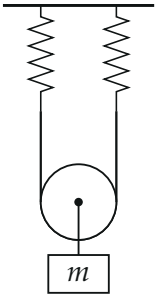
$$x_1 = \frac{T_1}{k} = \frac{mg}{2k}, \qquad x_2 = \frac{T_1}{5k} = \frac{mg}{10k}.$$



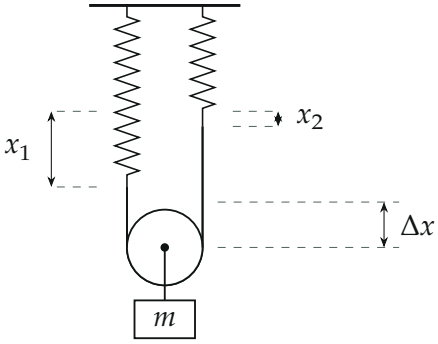
Удлинения при одной силе $mg/2$: у пружины k — $x_1 = mg/(2k)$, у пружины $5k$ — $x_2 = mg/(10k)$ в пять раз меньше. Смещение груза Δx — середина между 0 и суммой $x_1 + x_2$ (в единицах mg/k: 0,1; 0,3; 0,5; 0,6)

4. Смещение груза. Блок висит на нити, перекинутой под ним; нить нерастяжима. Нижние концы пружин опустились на x_1 и x_2, ось блока — на Δx. Вертикальный участок нити слева между пружиной и блоком изменился на $\Delta x - x_1$, справа — на $\Delta x - x_2$ (нить скользит по блоку: слева участок стал короче, справа длиннее). Дуга под блоком не изменилась, и вся длина нити осталась прежней, поэтому сумма изменений равна нулю:

$$(\Delta x - x_1) + (\Delta x - x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{2k} + \frac{mg}{10k}\right) = \frac{3mg}{10k}.$$



до: пружины не растянуты



после: равновесие

Геометрия (для рисунка $mg/k = 2$ см): нижние концы пружин опустились на $x_1 = mg/(2k)$ и $x_2 = mg/(10k)$, ось блока — на Δx. Левый вертикальный участок нити стал короче (на рисунке с 1,2 до 0,8 см), правый — длиннее (до 1,6 см): нить проскользнула по блоку, а её полная длина не изменилась

Обратите внимание: груз опускается не на удлинение какой-то одной пружины и не на их сумму, а на половину суммы, потому что нить скользит по блоку и «делит» суммарное удлинение пополам между ветвями. И каждую пружину растягивает $mg/2$, а не mg.

Проверка. Размерность: mg/k — метры (Н/(Н/м)). Предельные случаи: для одинаковых пружин k и k получаем $x_1 = x_2 = mg/(2k)$ и $\Delta x = mg/(2k)$ — блок висит прямо на пружинах, нить не скользит; если вторая пружина очень жёсткая ($k_2 \to \infty$, $x_2 \to 0$), то $\Delta x = x_1/2 = mg/(4k)$ — классический подвижный блок с одним закреплённым концом нити. Наш ответ $\Delta x = 0{,}3\,mg/k$ лежит между $0{,}25\,mg/k$ и $0{,}5\,mg/k$, как и должно быть. Смысл: чем жёстче одна из пружин, тем меньше она вносит в сумму удлинений, но смещение всегда равно половине этой суммы.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{3mg}{10k}$.