Опрокидывание стержня

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, задача 4] Около края стола лежит стержень массой m длиной l. Стержень лежит перпендикулярно краю стола и свешивается со стола на одну пятую часть своей длины. Какую минимальную вертикальную силу F нужно приложить к стержню (см. рисунок), чтобы он опрокинулся?



▲ **Решение. Что происходит.** Пока сила F мала, стол удерживает стержень по всей лежащей на нём части, и равнодействующая сил реакции приложена где-то внутри этой части. С ростом F равнодействующая сдвигается к краю. Когда её линия действия дойдёт до самого края, сдвигаться дальше будет некуда: стол не может толкать стержень там, где его нет, и стержень начнёт поворачиваться вокруг края. Это и есть момент опрокидывания, а главная идея задачи — записать условия равновесия именно для него.

Обозначения. O — край стола; C — центр масс стержня (его середина); $\vec{N}$ — равнодействующая сил реакции стола; d — расстояние от линии действия $\vec{N}$ до края O внутрь стола. Свес равен $l/5$, значит, на столе лежит $4l/5$. Центр масс стоит на $l/2$ от левого конца, поэтому от края он удалён на

$$\frac{4l}{5} - \frac{l}{2} = \frac{3l}{10}$$

в сторону стола. Стержень покоится, поэтому сумма сил на него равна нулю и сумма моментов относительно любой оси равна нулю.

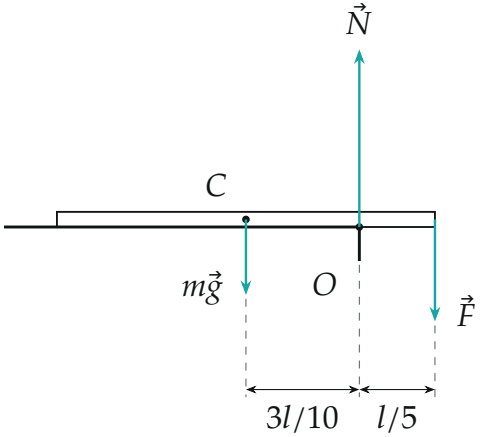
1. Куда смещается реакция стола. Запишем условия равновесия при произвольной силе F. Силы по вертикали: N вверх, mg и F вниз:

$$N - mg - F = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg + F.$$

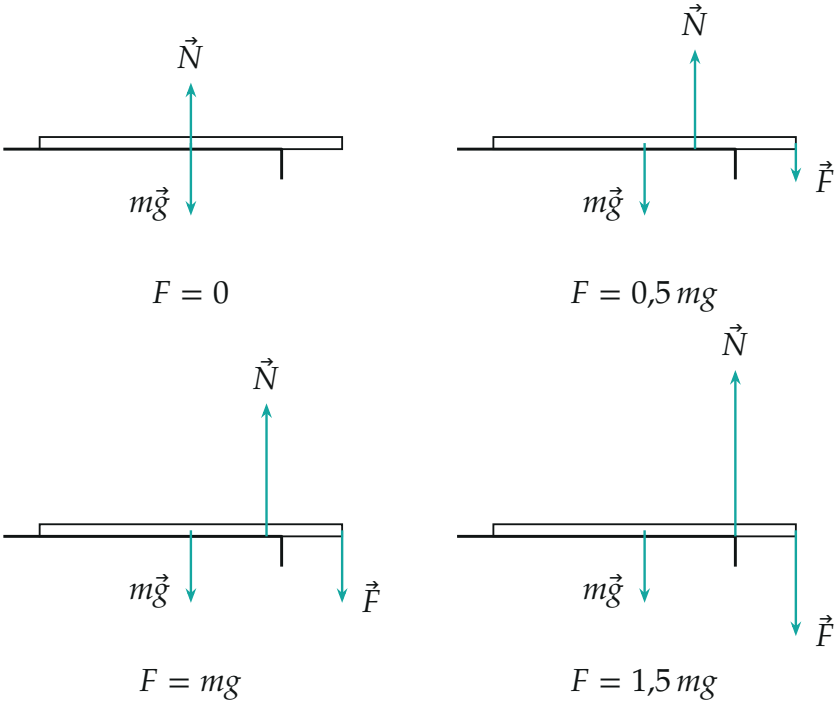
Моменты относительно оси, проходящей через край O. Сила F (правее края, вниз) и сила N (левее края, вверх) вращают стержень по часовой стрелке, сила тяжести (левее края, вниз) — против:

$$F\cdot\frac{l}{5}+N\,d=mg\cdot\frac{3l}{10}\quad\Rightarrow\quad d=\frac{l}{10}\cdot\frac{3mg-2F}{mg+F}.$$

При $F=0$ получаем $d=\frac{3l}{10}$: реакция стола проходит через центр масс, как и должно быть. С ростом F величина d убывает: реакция сдвигается к краю.



Силы в момент опрокидывания (длины стрелок по модулям при $F=\frac{3}{2}mg$, $N=\frac{5}{2}mg$) и плечи относительно края O

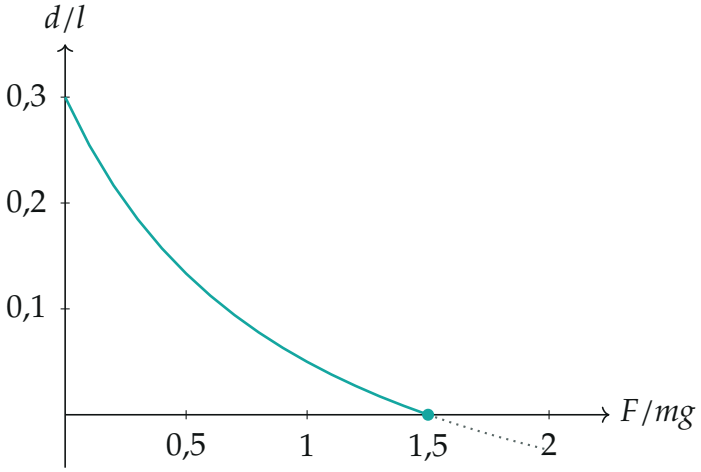


Реакция стола $\vec{N}$ при росте F: её линия действия (по формуле для d) уходит от центра масс к краю; длины стрелок — по модулям, $N = mg + F$

2. Предельный случай. Опрокидывание начинается, когда d дошло до нуля: линия действия $\vec{N}$ проходит через край O. Выберем ось через O — тогда момент неизвестной силы N равен нулю, и она в уравнение не входит. Остаются F и mg:

$$F \cdot \frac{l}{5} = mg \cdot \frac{3l}{10} \quad \Rightarrow \quad F_{\min} = \frac{3}{2}\,mg.$$

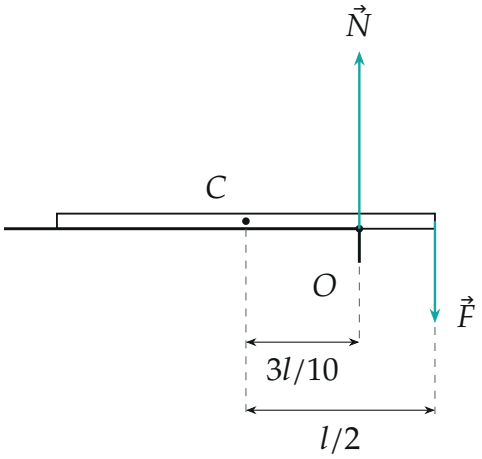
Та же величина получается из формулы для d: числитель $3mg - 2F$ обращается в нуль при $F = \frac{3}{2}mg$. При большей силе формула дала бы $d < 0$, то есть реакцию за краем, где стола нет. Равновесия при этом нет, и стержень поворачивается.



Расстояние d линии действия реакции от края (в долях l) при росте F: при $F = \frac{3}{2}mg$ оно обращается в нуль; пунктир — область, где равновесия уже нет

3. Второй способ: ось через центр масс. При $F = F_{\min}$ стержень ещё покоится, поэтому моменты можно взять относительно центра масс C. Сила тяжести проходит через C и момента не даёт. Реакция $N = mg + F$ приложена в точке O на расстоянии $3l/10$ от C и поворачивает стержень против часовой стрелки, сила F приложена на $l/2$ от C и вращает по часовой:

$$(mg + F) \cdot \frac{3l}{10} = F \cdot \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad 3mg = 2F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{2}\,mg.$$



Оси через центр масс C: плечо реакции $3l/10$, плечо силы F — $l/2$; сила тяжести через C момента не создаёт

Обратите внимание: опора стержня — не точка под центром масс. Пока F мала, реакция стола распределена по всей лежащей на столе части, и её равнодействующая стоит там, где этого требует равновесие (рисунок с четырьмя положениями). Поэтому момент надо брать относительно края именно в предельный момент, когда равнодействующая дошла до края.

Проверка. Размерность: $F \sim mg$ — сила, верно. Общий вид для свеса kl: $F \cdot kl = mg\,(\frac{1}{2} - k)\,l$, то есть $F = mg\,\dfrac{1/2 - k}{k}$; при $k = \frac{1}{5}$ получается $\frac{3}{2}mg$. Если свес равен половине длины ($k = \frac{1}{2}$), центр масс над краем и $F = 0$: стержень стоит на грани опрокидывания сам. Если свес мал ($k \to 0$), рычаг силы F короткий и нужная сила растёт без предела.

Смысл: сила F действует на плече $l/5$, а сила тяжести — на плече $3l/10$, в полтора раза большем, поэтому и F должна быть в полтора раза больше веса стержня.

Ответ. $F_{\min} = \dfrac{3}{2}\,mg$.