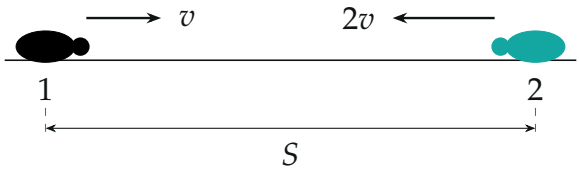
Два жука

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 8 класс, задача 5] Два жука, расстояние между которыми S, бегут навстречу друг другу. Один жук бежит с постоянной скоростью v. Второй жук бежит с постоянной скоростью $2v$, но в тот момент, когда расстояние между жуками уменьшается вдвое, он останавливается и отдыхает в течение одной трети времени своего движения. Затем он снова движется со скоростью $2v$, но в тот момент, когда расстояние между жуками уменьшается вдвое по сравнению с тем, каким оно было, когда он начал двигаться во второй раз, он снова останавливается и отдыхает в течение одной трети времени своего второго движения, а потом опять начинает двигаться. И далее движение повторяется. Через какое время встретятся жуки, и какие расстояния пройдут до встречи?



Поясняющий рисунок: жуки бегут навстречу друг другу

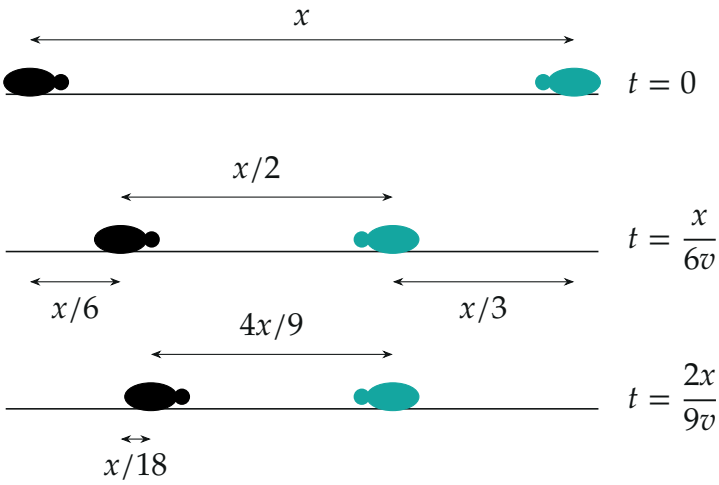
▲ **Решение.** **Что происходит.** Первый жук бежит всё время. Второй бежит и отдыхает, причём отдых каждый раз составляет треть от времени бега, а останавливается он, когда расстояние между жуками уменьшилось вдвое по сравнению с началом бега. Значит, вся картина подобна самой себе: после первой остановки и отдыха жуки находятся на меньшем расстоянии, и всё повторяется в том же порядке, только в другом масштабе. Достаточно разобрать одну такую *стадию* (бег и отдых второго жука) для произвольного начального расстояния x, найти её длительность и сближение за неё, а затем сложить все стадии.

Обозначения. x — расстояние между жуками в начале стадии; t_0 — время бега второго жука в стадии; τ — длительность стадии; y — на сколько жуки сблизились за стадию; T — время до встречи; S_1, S_2 — пути первого и второго жука.

1. Бег второго жука. Пока второй жук бежит, жуки сближаются со скоростью $v + 2v = 3v$. Расстояние должно уменьшиться с x до $x/2$, то есть на $x/2$:

$$t_0 = \frac{x/2}{3v} = \frac{x}{6v}.$$

За это время первый жук пробегает $vt_0 = \dfrac{x}{6}$, второй $2vt_0 = \dfrac{x}{3}$, и вместе $\dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{2}$, как и должно быть.



Одна стадия при $x = 9$ условных единиц: положения жуков в начале, в момент остановки второго жука и в конце отдыха (оба положения и длины участков вычислены)

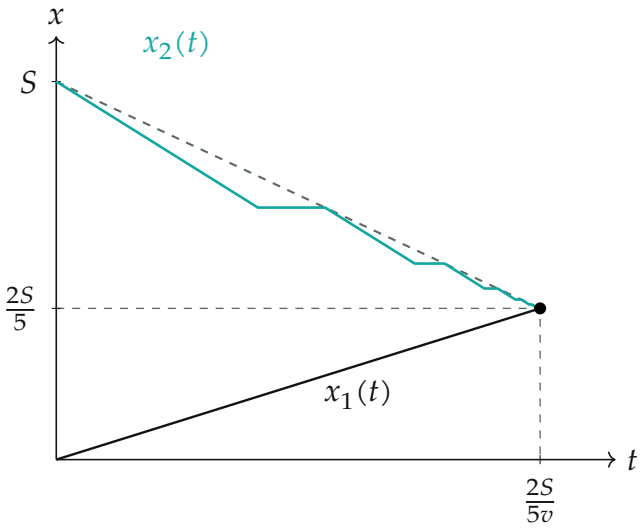
2. Отдых. Второй жук стоит треть времени бега, то есть

$$\frac{t_0}{3} = \frac{x}{18v},$$

а первый всё это время бежит и пробегает $v \cdot \dfrac{x}{18v} = \dfrac{x}{18}$. Длительность стадии и сближение за неё:

$$\tau = t_0 + \frac{t_0}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{6v} = \frac{2x}{9v}, \qquad y = \frac{x}{6} + \frac{x}{3} + \frac{x}{18} = \frac{5x}{9}.$$

Так как $y < x$, встреча в этой стадии не наступает: к концу отдыха расстояние равно $x - y = \dfrac{4x}{9}$, и начинается следующая стадия, подобная этой. Бег и отдых повторяются бесконечно много раз, потому что расстояние каждый раз умножается на $\dfrac{4}{9}$, но никогда не обращается в нуль.



Положения жуков вдоль линии (координата от начала бега первого жука): пока второй жук бежит, график $x_2(t)$ идёт вниз круче, на отдыхе — горизонтален; пунктир — движение с постоянной скоростью $\frac{3}{2}v$

3. Время до встречи. Для n-й стадии начальное расстояние x_n другое, но отношения $\tau_n = \dfrac{2}{9v}x_n$ и $y_n = \dfrac{5}{9}x_n$ те же, поэтому

$$\tau_n = \frac{2}{5v}\,y_n.$$

Встреча происходит, когда жуки сблизились на всё расстояние S, то есть когда сумма сближений всех стадий равна S: $\sum y_n = S$. Складывая длительности стадий, получаем время до встречи:

$$T = \sum \tau_n = \frac{2}{5v}\sum y_n = \frac{2S}{5v}.$$

Это же можно сказать иначе: средняя скорость сближения на каждой стадии равна $\frac{y}{\tau} = \frac{5}{2}v$, и за время T при такой скорости жуки сближаются на S.



стадии: на сколько сблизились жуки

Сверху — на какие части делится отрезок S точкой встречи, снизу — на сколько жуки сближаются в первой, второй, третьей и следующих стадиях ($\frac{5}{9}S + \frac{20}{81}S + \ldots = S$)

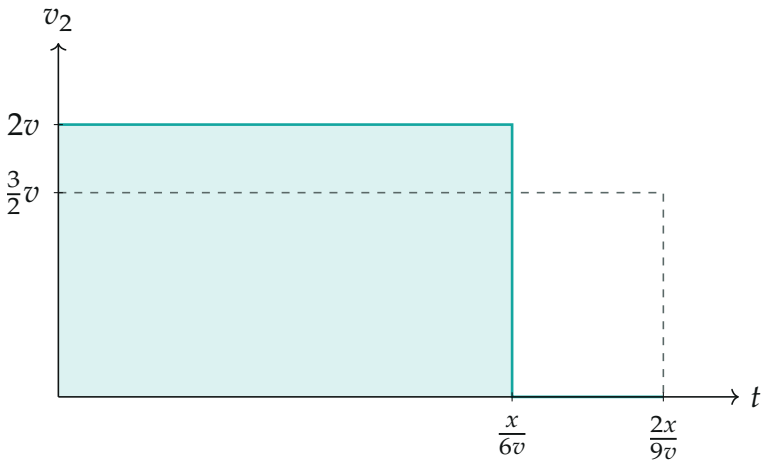
4. Пройденные пути. Первый жук бежит всё время T со скоростью v, второй — оставшуюся часть расстояния:

$$S_1 = vT = \frac{2S}{5}, \qquad S_2 = S - S_1 = \frac{3S}{5}.$$

5. Второй способ: средняя скорость второго жука. За стадию длительностью $\tau = \frac{2x}{9v}$ второй жук бежит время $t_0 = \frac{x}{6v}$, то есть долю $\frac{t_0}{\tau} = \frac{3}{4}$ времени. Его средняя скорость

$$v_2^{\text{ср}} = 2v \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}v$$

не зависит от номера стадии, поэтому, начиная с первой, он движется как бы с постоянной скоростью $\frac{3}{2}v$. Жуки сближаются со скоростью $v + \frac{3}{2}v = \frac{5}{2}v$ и встречаются через $T = \frac{S}{5v/2} = \frac{2S}{5v}$. Путь второго: $\frac{3}{2}v \cdot \frac{2S}{5v} = \frac{3S}{5}$, как и получилось.



Скорость второго жука за одну стадию: площадь под ступенькой равна площади прямоугольника высотой $\frac{3}{2}v$ — пути за стадию одинаковы

Обратите внимание: встреча — предел бесконечной последовательности стадий, а не момент «последней остановки». Поэтому время нельзя искать, считая отдельные стадии до конца; его находят через сумму всех стадий или через среднюю скорость.

Проверка. Размерность: S/v — время. Если бы второй жук не отдыхал, жуки сближались бы со скоростью $3v$ и встретились бы через $\dfrac{S}{3v} \approx 0{,}33\,\dfrac{S}{v}$; с отдыхом время больше: $0{,}4\,\dfrac{S}{v}$, как и должно быть. Расчёт на python (моделирование стадий с $S = v = 1$, 35 стадий) дал $T = 0{,}4000$, пути 0,4000 и 0,6000.

Смысл: средняя скорость второго жука — три четверти от $2v$, потому что он бежит $\frac{3}{4}$ всего времени.

Ответ. Жуки встретятся через время $T = \dfrac{2S}{5v}$; первый жук пробежит $\dfrac{2S}{5}$, второй — $\dfrac{3S}{5}$.