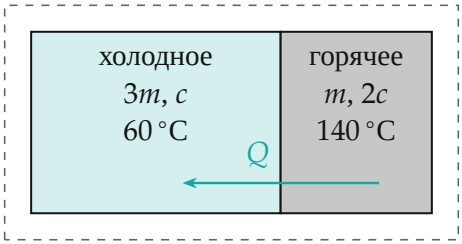
Теплообмен холодного и горячего

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Имеется два тела — холодное и горячее, причём масса холодного втрое больше массы горячего. Холодное имеет температуру $t_1 = 60\,^\circ\text{C}$, горячее — $t_2 = 140\,^\circ\text{C}$. Удельная теплоёмкость вещества более горячего тела вдвое больше удельной теплоёмкости более холодного. Тела приводят в тепловой контакт, и более холодное тело нагревается до температуры $t_x = 70\,^\circ\text{C}$ за время $t = 2$ мин. Какой будет в этот момент температура более горячего тела? Нагреется ли более холодное тело до температуры $t_y = 80\,^\circ\text{C}$ ещё за такое же время? Ответ обосновать. Теплообменом с окружающими телами пренебречь.



теплоизолированная система

Поясняющий рисунок к условию: два тела в тепловом контакте внутри теплоизолированной системы; стрелка — поток теплоты от горячего тела к холодному

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тела обмениваются теплотой только друг с другом: сколько теплоты отдало горячее, ровно столько получило холодное. Первый вопрос — это уравнение теплового баланса для момента, когда холодное тело нагрелось до $70\,^\circ\text{C}$. Второй вопрос качественный: скорость передачи теплоты тем больше, чем больше разность температур тел, а разность в первые две минуты уже заметно уменьшилась, значит, за следующие две минуты холодное тело нагреется меньше. Главная идея: баланс теплоты на первом интервале и сравнение «скоростей» на втором.

Обозначения. m — масса горячего тела (холодного — $3m$); c — удельная теплоёмкость вещества холодного тела (горячего — $2c$); t_2' — искомая температура горячего тела в момент, когда холодное нагрелось до t_x; $\Delta t_1, \Delta t_2$ — изменения температур холодного и горячего тел; τ — время от начала контакта.

1. Тепловой баланс за первые 2 минуты. Холодное тело нагрелось от t_1 до t_x и получило количество теплоты

$$Q_{\text{пол}} = c \cdot 3m\,(t_x - t_1) = c \cdot 3m \cdot 10\,^\circ\text{C} = 30\,mc \cdot {}^\circ\text{C}.$$

Горячее тело охладилось от t_2 до t_2' и отдало

$$Q_{\text{отд}} = 2c \cdot m\,(t_2 - t_2').$$

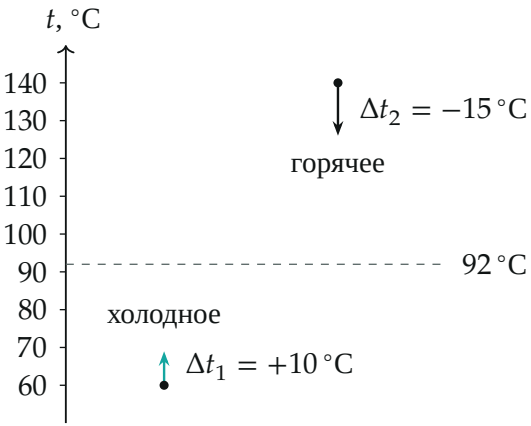
Потерь нет, поэтому $Q_{\text{пол}} = Q_{\text{отд}}$:

$$3\,c\,m\,(t_x - t_1) = 2\,c\,m\,(t_2 - t_2') \quad \Rightarrow \quad t_2' = t_2 - \frac{3}{2}\,(t_x - t_1).$$

Подставим числа:

$$t_2' = 140 - \frac{3}{2} \cdot 10 = 125\,^\circ\text{C}.$$

Множитель $3/2$ — отношение теплоёмкостей тел $C_1/C_2 = 3cm/(2cm)$: у холодного тела теплоёмкость больше, поэтому оно нагревается на $10\,^\circ$C, а горячее остывает на $15\,^\circ$C.



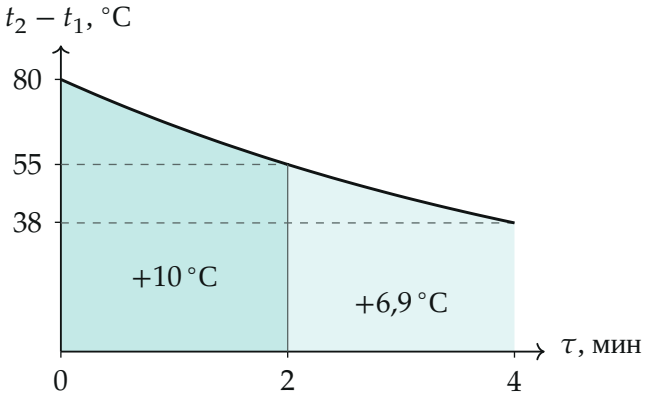
Температуры на шкале: холодное тело нагрелось на 10 °C *(бирюзовая стрелка), горячее остыло на* 15 °C *(чёрная); штриховая линия — общая температура* 92 °C*, к которой температуры тел придут через долгое время*

Обратите внимание: горячее тело остыло на 15 °C, а холодное нагрелось на 10 °C. Равенство $Q_{\text{пол}} = Q_{\text{отд}}$ относится к количествам теплоты, а не к изменениям температур, потому что теплоёмкости тел разные.

2. Второй вопрос: качественное обоснование. Пусть скорость передачи теплоты (мощность P) зависит от разности температур тел $\Delta = t_{\text{гор}} - t_{\text{хол}}$ и тем больше, чем больше Δ. В начале $\Delta = 80\,^\circ\text{C}$, в конце первых двух минут $\Delta = 125 - 70 = 55\,^\circ\text{C}$, и дальше она только уменьшается, пока тела сближаются по температуре. Значит, в каждый момент второго двухминутного интервала $\Delta \leq 55\,^\circ\text{C}$, а в каждый момент первого $\Delta \geq 55\,^\circ\text{C}$. Следовательно, мощность теплопередачи в любой момент второго интервала не больше, чем в любой момент первого, и за второй интервал передано *меньше* теплоты, чем за первый:

$$Q_2 < Q_1 = 30\,mc \cdot {}^\circ\text{C}.$$

Нагрев холодного тела за второй интервал $\Delta t = Q_2/(3cm) < 10\,^\circ\text{C}$, то есть к четвёртой минуте его температура будет ниже $70 + 10 = 80\,^\circ\text{C}$. Холодное тело до $t_y = 80\,^\circ\text{C}$ за ещё 2 минуты **не нагреется**.

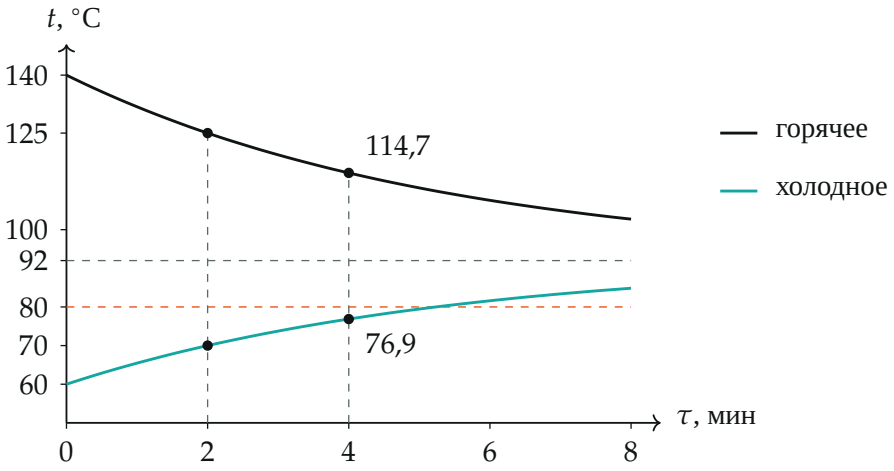


Разность температур тел со временем (иллюстрация для закона Ньютона, мощность $\propto \Delta$): площадь под кривой пропорциональна переданной теплоте. За первые две минуты холодное тело нагрелось на $10\,^\circ C$, за вторые — заведомо меньше; значения $+10\,^\circ C$ и $+6{,}9\,^\circ C$ даёт закон Ньютона

Числовой пример для закона Ньютона. Если мощность теплопередачи пропорциональна разности температур, то $\Delta(\tau)$ убывает по показательному закону: за каждые 2 мин разность уменьшается в $55/80 = 0{,}6875$ раза. Общая температура в конце $t_\infty = (3\cdot 60 + 2\cdot 140)/5 = 92\,^\circ\text{C}$ (взвешенное по теплоёмкостям среднее), и

$$t_{\text{хол}}(\tau) = 92 - 32\cdot 0{,}6875^{\tau/2},$$
$$t_{\text{гор}}(\tau) = 92 + 48\cdot 0{,}6875^{\tau/2} \qquad (\tau \text{ в минутах}).$$

Проверка условия: при $\tau = 2$ получаем $92-22 = 70$ и $92+33 = 125$. При $\tau = 4$ холодное тело нагреется до $92 - 32\cdot 0{,}6875^2 \approx 76{,}9\,^\circ\text{C}$, горячее остынет до $\approx 114{,}7\,^\circ\text{C}$. До $80\,^\circ\text{C}$ холодное тело дойдёт лишь примерно на 5,2-й минуте.



Температуры тел со временем (закон Ньютона): горячее остывает, холодное нагревается, обе кривые стремятся к 92 °C. Горизонталь 80 °C холодное тело не пересекает до $\tau = 4$ мин

Проверка. Размерность: температуры в градусах Цельсия, масса теплоёмкость сократились. Физический смысл: температура горячего тела 125 °C лежит между 140 °C и общей конечной 92 °C, температура холодного 70 °C — между 60 и 92 °C. Знак: горячее остывает, холодное нагревается. Второй способ для первого вопроса: холодное тело может получить в сумме $3cm(92 - 60) = 96\,cm \cdot$ °C; за первые 2 минуты оно получило $30\,cm \cdot$ °C, то есть около трети.

Смысл. Теплота перетекает всё медленнее по мере выравнивания температур, поэтому нагрев холодного тела замедляется.

Ответ. Температура горячего тела в этот момент 125 °C; за ещё 2 минуты холодное тело до 80 °C не нагреется (нагреется меньше чем на 10 °C).