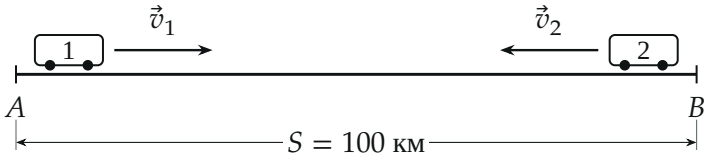
Машины между A и B

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Две машины ездят следующим образом между городами A и B, расстояние между которыми $S = 100$ км: (1) машины выехали одновременно из городов A и B и поехали навстречу друг другу с разными скоростями; (2) доехав до городов B и A соответственно, машины мгновенно разворачиваются и едут назад к городам, откуда они выехали. Там они снова мгновенно разворачиваются, едут к городам A и B, снова разворачиваются и т.д. (3) скорость каждой машины постоянна. Известно, что третья встреча машин произошла через время $t = 3$ часа 20 минут после начала их движения. Через сколько времени после начала движения машин произошла их первая встреча? Какое расстояние прошла до третьей встречи вторая машина, если первая прошла расстояние $S_1 = 285$ км? Чему равны скорости машин? Во время трёх первых встреч машины ехали навстречу друг другу.



Поясняющий рисунок к условию: машина 1 выезжает из A, машина 2 — из B, скорости постоянны и различны

▲ **Решение. Что происходит.** Машины встречаются, едут дальше до конца дороги, мгновенно разворачиваются и снова едут навстречу. Скорости постоянны, поэтому суммарный путь, пройденный двумя машинами, растёт со временем линейно: $s_1 + s_2 = (v_1 + v_2)\,\tau$. Нужно понять, какому суммарному пути отвечает каждая встреча: до первой — S, а между соседними встречами — по $2S$. Главная идея: встречи наступают при суммарных путях S, $3S$, $5S$, а значит, и времена встреч относятся как $1 : 3 : 5$.

Обозначения. v_1, v_2 — скорости машин (машина 1 выезжает из A, машина 2 — из B), s_1, s_2 — пути, пройденные машинами от начала движе-

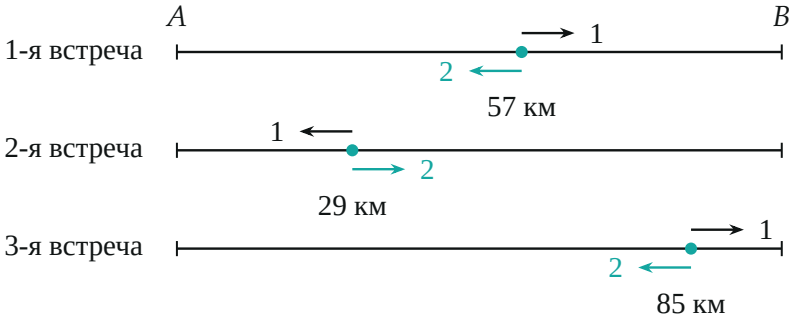
ния, τ — время от начала движения, t_1 и t — моменты первой и третьей встречи.

1. Суммарный путь до первой встречи. Машины выехали навстречу друг другу из концов дороги длиной S, и в момент встречи вместе прошли всю дорогу:

$$s_1 + s_2 = S \quad \text{(к первой встрече)}.$$

2. Суммарный путь между соседними встречами. Пусть машины встретились в некоторой точке и (по условию) ехали навстречу друг другу, значит, после встречи они разъезжаются: машина 1 едет к концу B, машина 2 — к концу A. Каждая доезжает до своего конца: вместе они проходят расстояние от места встречи до B плюс расстояние от места встречи до A, то есть S. Затем они мгновенно разворачиваются и снова едут навстречу, пока не встретятся: вместе они снова проходят всю дорогу, ещё S. Итого между соседними встречами при встречном движении суммарный путь равен

$$2S.$$

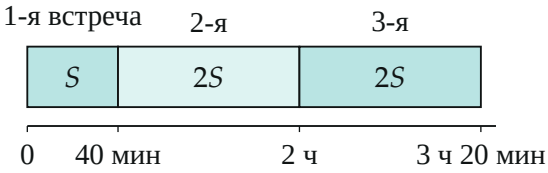


Положение машин при трёх первых встречах (по найденным ниже скоростям): в каждой из встреч машины едут навстречу друг другу, стрелки — направления движения

3. Моменты встреч. Скорости постоянны, поэтому $s_1 + s_2 = (v_1 + v_2)\tau$ — пропорционально времени. Суммарные пути к первой, второй

и третьей встречам равны S, $3S$ и $5S$, значит, времена относятся как $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 3 : 5$. Для первой встречи и для третьей:

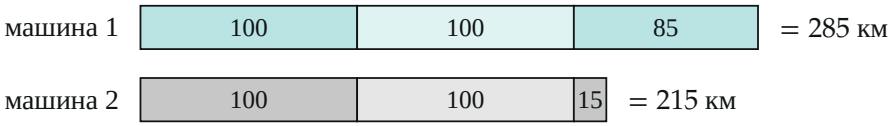
$$t_1 = \frac{t}{5} = \frac{3\text{ ч }20\text{ мин}}{5} = \frac{200\text{ мин}}{5} = 40\text{ мин}.$$



Время до трёх встреч: бирюзовые участки соответствуют суммарному пути S, $2S$, $2S$ между встречами; S, $3S$, $5S$ нарастают, времена 40, 120, 200 мин

4. Путь второй машины. К третьей встрече машины вместе прошли $5S = 500$ км, а первая — $S_1 = 285$ км, поэтому

$$S_2 = 5S - S_1 = 500 - 285 = 215\text{ км}.$$



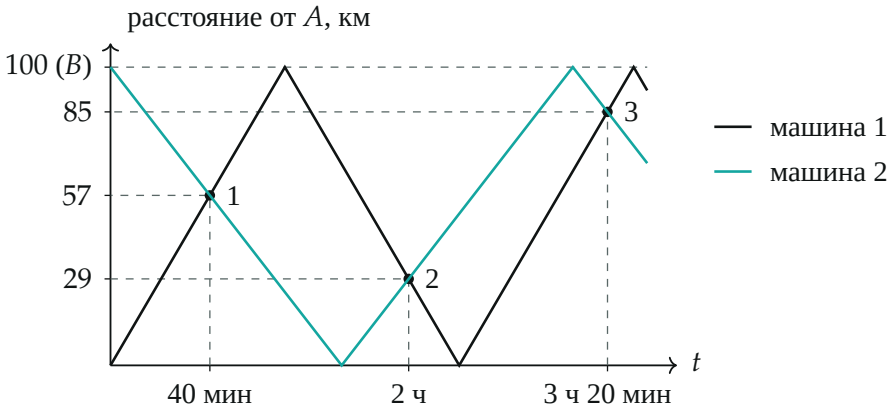
Пути машин до третьей встречи: у машины 1 два полных пробега по дороге и ещё 85 км, у машины 2 два полных пробега и ещё 15 км; в сумме 500 км

5. Скорости. Каждая машина проехала свой путь за время $t = 3\text{ ч }20\text{ мин} = \frac{10}{3}$ ч (не 3,2 и не 3,3 ч):

$$v_1 = \frac{S_1}{t} = \frac{285}{10/3} = 85{,}5\text{ км/ч}, \qquad v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{215}{10/3} = 64{,}5\text{ км/ч}.$$

Обратите внимание: условие «во время трёх первых встреч машины ехали навстречу друг другу» нужно для шага 2. Если бы быстрая машина

уже догоняла медленную, суммарный путь между встречами был бы другим. Проверим на найденных скоростях: сумма $v_1 + v_2 = 150$ км/ч, и на рисунке выше (положения при трёх встречах) встречи действительно встречные.



Положение машин на дороге в зависимости от времени (найденные скорости): зубчатые линии, пересечения — встречи (точки 1, 2, 3 в моменты 40 мин, 2 ч, 3 ч 20 мин, на расстояниях 57, 29, 85 км от A)

Второй способ: развёртка дороги. «Раскроем» отражения: дорога — как бы половина замкнутого кольца длиной $2S$, а отразившаяся от конца машина просто продолжает ехать по второй половине кольца в ту же сторону. Положение на кольце: машина 1 — $p_1 = v_1\tau$, машина 2 — $p_2 = S + v_2\tau$ (она стартует из B, то есть из точки S кольца). Точка дороги, где стоит машина с кольцевой координатой p, одна и та же для p и для $2S - p$. Значит, машины в одной точке дороги, если $p_1 \equiv p_2$ или $p_1 + p_2 \equiv 0$ по модулю $2S$. Первое — машина догоняет другую (по условию первые три встречи не такие), второе — встреча лицом к лицу: $v_1\tau + S + v_2\tau = 2Sk$, то есть

$$(v_1 + v_2)\,\tau = (2k - 1)\,S = S,\ 3S,\ 5S, \ldots$$

Те же суммарные пути, что в шагах 1–3.

Проверка. Размерность: пути в километрах, время в часах, скорости — километры в час. Подставим найденное: суммарная скорость $v_1 +$

$v_2 = 150$ км/ч, первая встреча при $\tau = 100/150 = 2/3$ ч $= 40$ мин — сходится с шагом 3. До первой встречи первая машина проехала $85{,}5 \cdot 2/3 = 57$ км, вторая — 43 км: $57 + 43 = 100$ км $= S$. Третья встреча: суммарный путь $150 \cdot 10/3 = 500$ км $= 5S$, и машина 1 проехала 285 км, машина 2 — 215 км, всё как в условии.

Смысл. Встреча машин, которые разворачиваются на концах дороги, — то же, что встреча двух машин, едущих навстречу по замкнутой дороге: суммарный путь между встречами всегда одинаков.

Ответ. Первая встреча произошла через 40 мин после начала движения; вторая машина до третьей встречи прошла 215 км; скорости машин 85,5 км/ч и 64,5 км/ч.