Тела в сообщающихся сосудах

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Имеются два цилиндрических сообщающихся сосуда с водой, связанных внизу узкой трубкой. Площади сечений сосудов относятся как $S_1 : S_2 = 1 : k$. В сосуды опускают два тела, которые плавают в воде: в первый — тело объёмом V и плотностью ρ, во второй — тело объёмом nV и плотностью $m\rho$. На сколько увеличится высота уровня жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением? Плотность воды ρ_0.

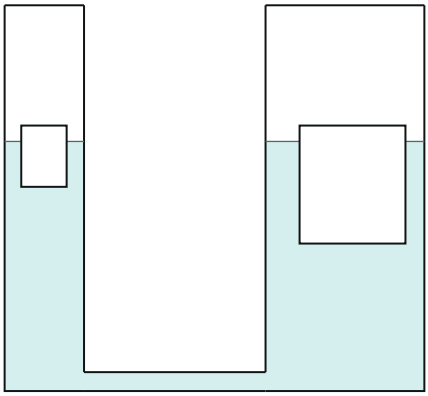


Рисунок условия: два цилиндрических сосуда, соединённые внизу узкой трубкой, в каждом плавает тело (во втором шире сосуд и больше тело)

▲ **Решение. Что происходит.** Плавающее тело вытесняет воду — столько, сколько весит само, — и вся эта вода «добавляется» к воде в сосуде: уровень поднимается. Сосуды соединены, поэтому вода перетекает, пока давление у дна в обоих сосудах не сравняется; это значит, что уровни в сосудах (вместе с плавающими телами) становятся одинаковыми. Главная идея: найти суммарный объём воды, вытесненной обоими телами, и распределить его так, чтобы высота подъёма в обоих сосудах была одной и той же. Класс задачи: условие плавания (закон Архимеда) и сообщающиеся сосуды.

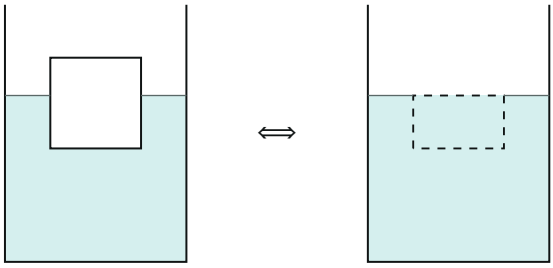
Обозначения. S_1 и $S_2 = kS_1$ — площади сечений сосудов, $M_1 = \rho V$ и $M_2 = m\rho \cdot nV$ — массы тел, $V_{\text{выт},1}$ и $V_{\text{выт},2}$ — объёмы воды, вытес-

ненной телами, h — на сколько поднялся уровень в каждом сосуде, H — высота уровня воды в сосуде.

1. Почему уровни одинаковы. Плавающее тело давит на воду силой, равной своему весу, а по условию плавания вес тела равен весу вытесненной воды. Если мысленно вытащить тело и заполнить водой тот объём, который оно занимало в воде, то силы в воде не изменятся: вес добавленной воды равен весу тела. Давление у дна сосуда, где плавает тело, поэтому такое же, как в сосуде без тела с уровнем H (высота уровня считается вместе с телом):

$$p_{\text{дна}} = p_{\text{атм}} + \rho_0 g H.$$

Давление у дна на уровне трубки в сообщающихся сосудах одинаково, поэтому $H_1 = H_2$: уровни в обоих сосудах совпадают.



тело плавает вместо погружённой части — вода

Равенство давлений: плавающее тело вытесняет воду, вес которой равен его весу, поэтому его можно заменить водой в объёме погружённой части (штриховой контур) — давление у дна не изменится

2. Объём воды, вытесненной каждым телом. Условие плавания для первого тела — вес тела равен силе Архимеда:

$$\rho g V = \rho_0 g\, V_{\text{выт},1} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{выт},1} = \frac{\rho}{\rho_0} V.$$

Для второго тела (объём nV, плотность $m\rho$):

$$m\rho\, g\, nV = \rho_0 g\, V_{\text{выт},2} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{выт},2} = \frac{mn\rho}{\rho_0} V.$$

Суммарный объём вытесненной воды:

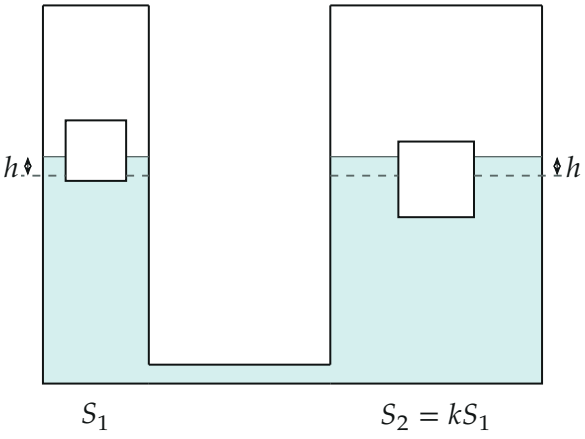
$$V_{\text{выт}} = V_{\text{выт},1} + V_{\text{выт},2} = \frac{(1+mn)\,\rho V}{\rho_0}.$$

3. Как этот объём разместится в сосудах. Количество воды в сосудах не изменилось, а к объёму под уровнем (вода плюс погружённые части тел) прибавилось $V_{\text{выт}}$. Уровень был одинаковым и стал одинаковым, поэтому в каждом сосуде он поднялся на одно и то же h, и объём под уровнем в двух сосудах вырос на $S_1 h + S_2 h$:

$$S_1 h + k S_1 h = V_{\text{выт}} \quad \Rightarrow \quad (1+k)\,S_1\,h = \frac{(1+mn)\,\rho V}{\rho_0}.$$

Отсюда

$$h = \frac{(1+mn)\,\rho V}{(1+k)\,\rho_0 S_1}.$$



Плоская модель в масштабе (объём заменён площадью): пунктир — прежний общий уровень, сплошная линия — новый; в обоих сосудах уровень поднялся на одно и то же h



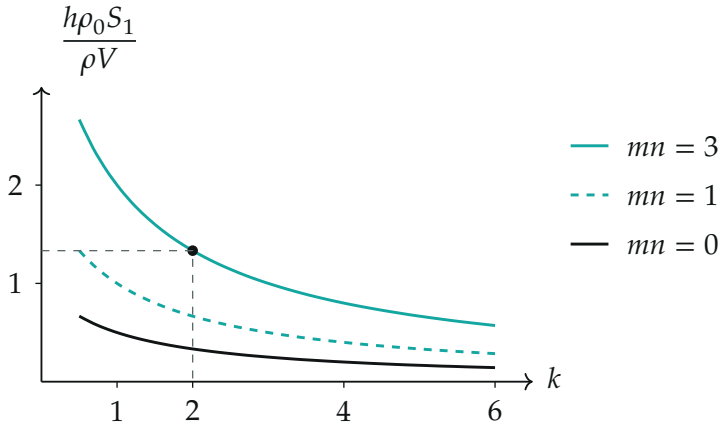
Баланс объёмов (числа взяты из рисунка выше): верхний столбик — вода, вытесненная телами, нижний — прибавка объёма под уровнем в сосудах; полные длины совпадают, а в сосудах прибавка делится как $1:k$

Обратите внимание: сила Архимеда считается по объёму, погружённому в воду, а не по полному объёму тела. Поэтому в ответ входят плотности тел, а не только их объёмы. Кроме того, высота подъёма в сосудах одна и та же, хотя тела разные и стоят в сосудах с разной площадью: вода перетекает по трубке, пока уровни не сравняются.

Второй способ: давление. Прибавим к системе вес обоих тел, $G = (\rho V + m\rho\, nV)g = (1+mn)\rho Vg$. Он передаётся на дно сообщающихся сосудов, суммарная площадь которых $S_1 + S_2 = (1+k)S_1$, а давление на уровне трубки одинаково, поэтому оно выросло на

$$\Delta p = \frac{G}{(1+k)S_1} = \rho_0 gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{(1+mn)\,\rho V}{(1+k)\,\rho_0 S_1},$$

тот же результат.



Подъём уровня h в единицах $\rho V/(\rho_0 S_1)$ в зависимости от отношения площадей k при разных mn; точка — пример $mn = 3, k = 2$: $h = \frac{4}{3}\,\rho V/(\rho_0 S_1)$

Проверка. Размерность: $\rho V/\rho_0$ — объём, деление на площадь даёт длину. Предельные случаи: если второго тела нет ($mn \to 0$), то вытесненный объём $\rho V/\rho_0$ растекается поровну по обоим сосудам, $h = \rho V/((1+k)\rho_0 S_1)$ — те же $(1+k)S_1$ в знаменателе, как на кривой $mn = 0$ графика. Если $\rho \to \rho_0$ и $m\rho \to \rho_0$, тела почти полностью погружены, и $h = (V + nV)/((1 + k)S_1)$ — подъём от добавленного полного объёма тел. С ростом k (правый сосуд всё шире) уровень поднимается всё меньше, как на графике.

Смысл. Плавающие тела подпирают уровень воды так, как если бы вместо них в сосуды долили воду того же веса, и уровень поднимается во всех сообщающихся сосудах одинаково.

Ответ. В каждом сосуде уровень поднимется на одну и ту же высоту $h = \dfrac{(1 + mn)\,\rho V}{(1 + k)\,\rho_0 S_1}$.