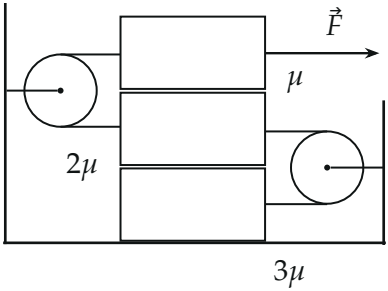
Три бруска и нити с блоками

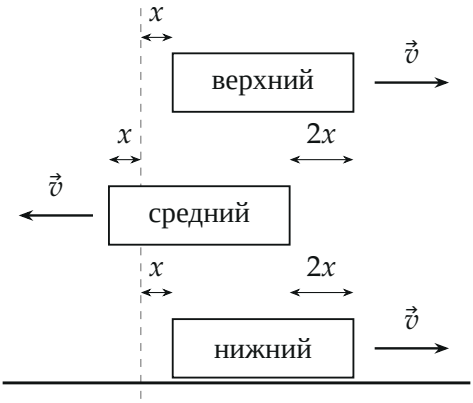
Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Три одинаковых бруска массой m каждый положили друг на друга и связали двумя невесомыми нерастяжимыми нитями, которые перебросили через два неподвижных невесомых блока (см. рисунок). Какой минимальной горизонтальной силой $\vec{F}$ можно сдвинуть верхний брусок, если коэффициент трения между верхним и средним бруском равен μ, между средним и нижним бруском — 2μ, между нижним бруском и поверхностью — 3μ (см. рисунок)? Найти также силы натяжения верхней и нижней нитей (см. рисунок).



▲ **Решение. Что происходит.** Нити нерастяжимы и перекинуты через блоки, поэтому бруски не могут двигаться по отдельности: верхний уходит вправо, и первая нить тянет средний влево на столько же; вторая нить при этом тянет нижний вправо. Значит, как только верхний брусок сдвинулся, сдвинулись все три, и сопротивляются им одновременно три силы трения. Главная идея: найти силу F как граничную — в тот момент, когда все три силы трения покоя стали предельными (равными μN), а ускорения ещё равны нулю.

Обозначения. $T_в$ — сила натяжения верхней нити (она проходит через левый блок и соединяет верхний и средний бруски), $T_н$ — нижней нити (через правый блок: средний и нижний бруски); f_1, f_2, f_3 — модули сил трения между верхним и средним, между средним и нижним, между нижним бруском и поверхностью. Ось x направим вправо, вдоль $\vec{F}$.

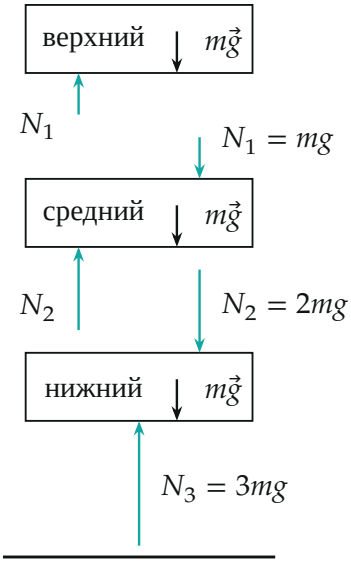
1. Как движутся бруски. За малое время верхний брусок смещается вправо на x. Нить, проходящая через левый блок, нерастяжима, поэтому средний брусок смещается влево на x. Нижняя нить связывает средний и нижний бруски через правый блок: когда средний уходит влево на x, нижний уходит вправо на x. Блоки невесомы и неподвижны, поэтому натяжение одной нити по обе стороны блока одинаково: нить действует на оба своих бруска силой $T_в$, нижняя — силой $T_н$.



Смещения брусков за малое время (штриховая линия — прежнее положение левых краёв). Верхний и нижний смещаются вправо на x, средний — влево на x; относительное проскальзывание: верхний по среднему — $2x$, средний по нижнему — $2x$, нижний по поверхности — x.

2. Нормальные силы и предельное трение. Нити горизонтальны, поэтому по вертикали каждый брусок уравновешен только весом тех, кто на нём лежит, и реакцией опоры. Верхний давит на средний силой mg, средний на нижний — $2mg$, нижний на поверхность — $3mg$ (вертикальное равновесие стопки: ниже лежит всё, что выше). Предельные силы трения покоя ($F_{тр} \leqslant \mu N$ — верно, пока нет скольжения, а в момент начала скольжения становится равенством):

$$f_1 = \mu \cdot mg, \qquad f_2 = 2\mu \cdot 2mg = 4\mu mg, \qquad f_3 = 3\mu \cdot 3mg = 9\mu mg.$$



Вертикальные силы (длины пропорциональны модулям; чёрные — вес $m\vec{g}$ из центра бруска, бирюзовые — силы взаимодействия соседей; стопка условно раздвинута). Пары N_1, N_2 — по третьему закону Ньютона равные по модулю силы давления верхнего на нижний и реакции нижнего на верхний; $N_1 = mg$, $N_2 = N_1 + mg$, $N_3 = N_2 + mg$.

3. Второй закон Ньютона для каждого бруска. В момент начала скольжения ускорения равны нулю, трение направлено против относительного движения (рисунок ниже). Проекции на ось x (вправо):

верхний брусок — сила F вправо, нить $T_в$ и трение f_1 влево:

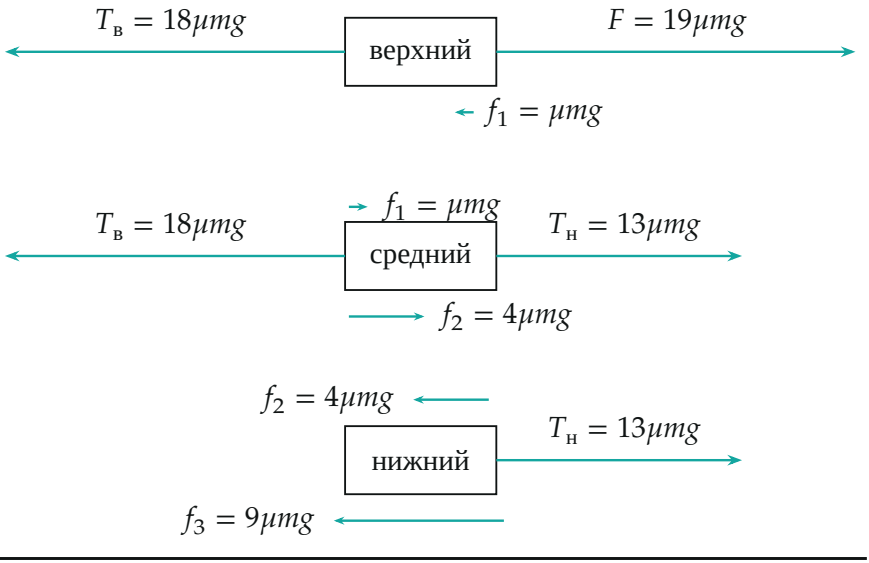
$$F - T_в - f_1 = 0;$$

средний брусок — нить $T_в$ влево (он едет влево), нить $T_н$ вправо, трение от верхнего f_1 и от нижнего f_2 вправо (оба соседа едут вправо относительно него):

$$-T_в + T_н + f_1 + f_2 = 0;$$

нижний брусок — нить $T_н$ вправо, трение от среднего f_2 и от поверхности f_3 влево:

$$T_н - f_2 - f_3 = 0.$$



Горизонтальные силы на каждый брусок (стопка условно раздвинута). Длины стрелок пропорциональны модулям; у каждого бруска стрелки влево и вправо уравновешивают друг друга: $19 = 18 + 1$, $18 = 13 + 4 + 1$, $13 = 4 + 9$.

4. Решение системы. Неизвестных три — F, $T_в$, $T_н$, уравнений тоже три; идём снизу вверх. Из уравнения нижнего бруска, затем среднего, затем верхнего:

$$T_н = f_2 + f_3 = 4\mu mg + 9\mu mg = 13\mu mg,$$

$$T_в = T_н + f_1 + f_2 = 13\mu mg + \mu mg + 4\mu mg = 18\mu mg,$$

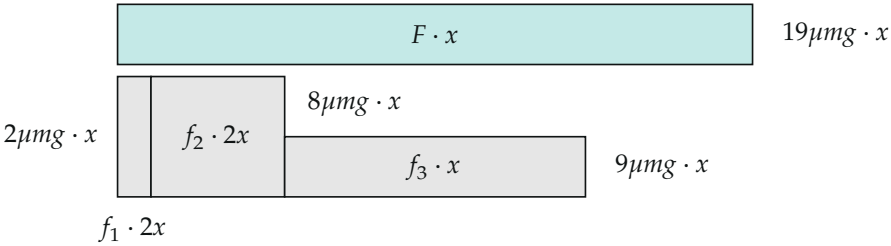
$$F = T_в + f_1 = 18\mu mg + \mu mg = 19\mu mg.$$

Если подставить все три уравнения друг в друга, нити исчезают: $F = 2f_1 + 2f_2 + f_3$. Множители $2, 2, 1$ не случайны: они равны путям проскальзывания в единицах x (см. рисунок смещений), и ниже это станет вторым способом.

5. Почему это минимальная сила (и второй способ). Пока $F < 19\mu mg$, равновесие возможно: из уравнений равновесия $F = 2f_1 + 2f_2 + f_3$, а силы трения покоя могут быть любыми от нуля до предельных; максимум правой части равен $2\mu mg + 2 \cdot 4\mu mg + 9\mu mg = 19\mu mg$.

При $F > 19\mu mg$ равновесия нет — бруски поедут. Тот же результат даёт работа: если верхний брусок сместился на x, то силы трения совершают работу, равную сумме $f \cdot$ (путь проскальзывания): $f_1 \cdot 2x + f_2 \cdot 2x + f_3 \cdot x$, а сила F — работу Fx; при медленном скольжении они равны:

$$Fx = f_1 \cdot 2x + f_2 \cdot 2x + f_3 \cdot x \quad \Rightarrow \quad F = 2f_1 + 2f_2 + f_3 = 19\mu mg.$$



Работа силы F на смещении верхнего бруска x (бирюзовый прямоугольник, площадь $19\,\mu mg\,x$) равна сумме работ трения (серые прямоугольники: ширина — сила, высота — путь проскальзывания): $2 + 8 + 9 = 19$ в единицах $\mu mg\,x$.

Обратите внимание. Нити нерастяжимы, поэтому нельзя сдвинуть только верхний брусок, оставив остальные на месте: вместе с ним неизбежно скользят и средний, и нижний. Именно поэтому в F входят все три силы трения, и притом средний брусок тормозится двумя нижними поверхностями сразу.

Проверка. Размерность: μmg — сила, F, $T_в$, $T_н$ — силы. Предел: при $\mu \to 0$ все силы стремятся к нулю — без трения сдвигать нечего удерживать. Равновесие каждого бруска проверено на рисунке: $19 = 18 + 1$, $18 = 13 + 4 + 1$, $13 = 4 + 9$. Работа и равновесие дают одно и то же $F = 19\mu mg$.

Смысл такой: чем ниже брусок, тем больше на него давят и тем сильнее трение, но верхний брусок ещё и вынужден тянуть за собой средний через нить, поэтому его сила F складывается не из одного, а из трёх слагаемых трения.

Ответ. $F_{\min} = 19\,\mu mg$; $T_в = 18\,\mu mg$; $T_н = 13\,\mu mg$.