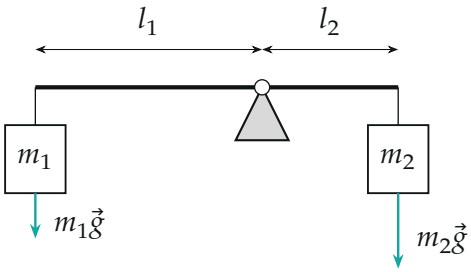
Неравноплечие весы

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Два груза с массами m_1 и m_2 уравновешены на неравноплечих весах ($m_1 < m_2$). Грузы меняют местами, добавляя к грузу m_2 ещё три точно таких же груза, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу m_1, чтобы равновесие весов восстановилось?



Поясняющий рисунок: первый опыт. Весы — рычаг с плечами l_1 (слева) и l_2 (справа), $l_1 > l_2$. Длины стрелок веса пропорциональны массам при $m_2/m_1 = l_1/l_2 = 5/3$.

▲ **Решение. Что происходит.** Весы — это рычаг. Он находится в равновесии, когда моменты сил тяжести относительно опоры равны. Плечи l_1 и l_2 нам неизвестны, но первый опыт даёт их отношение через массы. Дальше достаточно записать равновесие второго опыта и поделить одно уравнение на другое: так плечи сократятся.

Обозначения. l_1 — плечо левой чашки, l_2 — плечо правой чашки; в первом опыте m_1 слева, m_2 справа. Коромысло и чашки невесомы (пустые весы в равновесии), g — ускорение свободного падения. Δm — искомая масса добавочного груза.

1. Первый опыт: уравновешены m_1 и m_2. Правило моментов для рычага, находящегося в равновесии: сумма моментов относительно оси равна нулю, то есть момент силы тяжести слева равен моменту справа:

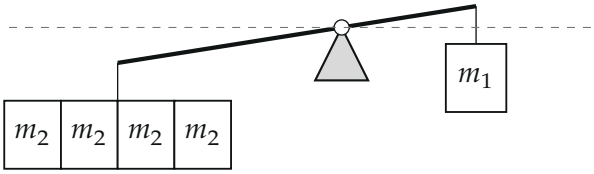
$$m_1 g\, l_1 = m_2 g\, l_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 l_1 = m_2 l_2, \qquad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} > 1.$$

Так как $m_1 < m_2$, левое плечо длиннее правого: лёгкий груз висит на длинном плече.

2. Второй опыт: грузы поменяли местами. Теперь на левом плече (длина l_1) висит груз m_2 с тремя такими же — всего $4m_2$, а на правом плече (длина l_2) — груз m_1. Моменты слева и справа:

$$M_{\text{л}} = 4m_2 g\, l_1, \qquad M_{\text{п}} = m_1 g\, l_2.$$

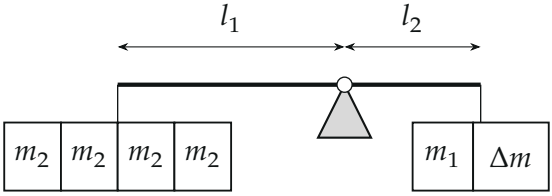
Слева момент больше: $4m_2 l_1 > m_1 l_2$ (ведь $l_1 > l_2$ и $4m_2 > m_1$), левая чашка опускается — равновесие нарушено, как и сказано в условии.



Второй опыт: слева груз m_2 и три таких же ($4m_2$) на длинном плече l_1, справа m_1 на коротком плече l_2. Левая чашка перевешивает; пунктир — горизонталь.

3. Добавляем Δm к m_1 (справа). Масса справа становится $m_1 + \Delta m$, и равновесие восстанавливается:

$$4m_2\, l_1 = (m_1 + \Delta m)\, l_2.$$



Равновесие восстановлено: на правом плече висят m_1 и добавочный груз Δm.

4. Исключаем плечи. Неизвестных, кроме Δm, два — l_1 и l_2, но входит только их отношение. Оно известно из первого опыта:

$l_1/l_2 = m_2/m_1$. Делим уравнение шага 3 на l_2:

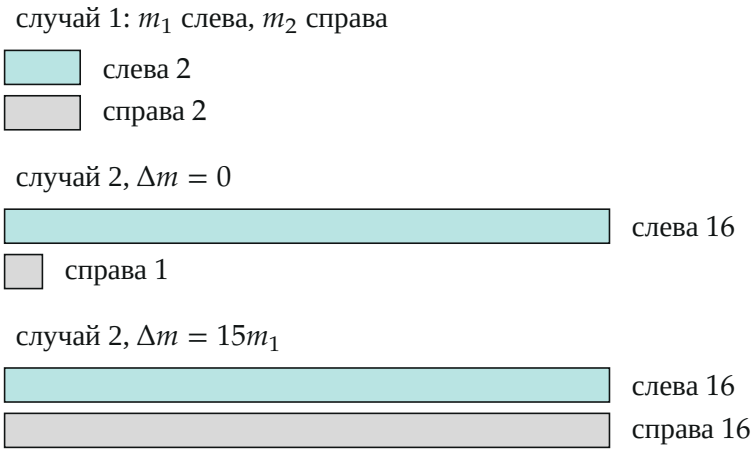
$$4m_2 \cdot \frac{l_1}{l_2} = m_1 + \Delta m \quad \Rightarrow \quad 4m_2 \cdot \frac{m_2}{m_1} = m_1 + \Delta m.$$

Отсюда

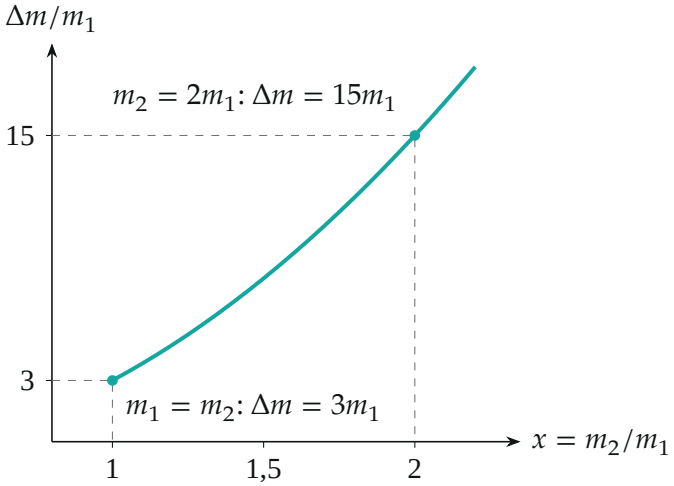
$$\Delta m = \frac{4m_2^2}{m_1} - m_1 = \frac{4m_2^2 - m_1^2}{m_1}.$$

(Эквивалентно: поделить уравнения шага 3 и шага 1 друг на друга — получим то же самое.)

5. Числовой пример. Возьмём $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг; тогда по шагу 1 $l_1/l_2 = 2$. Моменты в единицах $m_1 g\, l_2$: первый опыт — $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$, слева и справа по 2. Во втором опыте слева $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, справа $1 \cdot 1 = 1$; чтобы справа стало 16, нужно $(1 + \Delta m) \cdot 1 = 16$, то есть $\Delta m = 15$ кг. Формула даёт $(4 \cdot 4 - 1)/1 = 15$ кг.



Моменты сил тяжести в единицах $m_1 g\, l_2$ для примера $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $l_1/l_2 = 2$. Бирюзовые полосы — левая чашка, серые — правая. Третья пара: после добавки $\Delta m = 15m_1$ моменты равны.



Добавочная масса $\Delta m/m_1 = 4x^2 - 1$ как функция отношения масс $x = m_2/m_1$. Точки: $x = 1$ (плечи равны) и пример $x = 2$.

Обратите внимание. Добавочный груз кладут на чашку, где теперь лежит m_1, — на короткое плечо l_2. Нельзя считать, что достаточно добавить столько же грузов, сколько добавили слева (то есть $3m_1$): при неравных плечах каждый килограмм слева весит больше, и чем длиннее плечо l_1, тем больше добавка.

Проверка. Размерность: m_2^2/m_1 — масса. Предел: при равных плечах ($m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2$) слева $4m$, справа нужно тоже $4m$, значит $\Delta m = 3m$; формула даёт $(4m^2 - m^2)/m = 3m$. Второй способ — числовой пример шага 5.

Решение организаторов в PDF посчитано для другого варианта чисел, здесь — для чисел нашего условия.

Смысл такой: правое плечо короче в m_2/m_1 раз, поэтому масса справа должна быть во столько же раз больше, чем груз $4m_2$ слева.

Ответ. $\Delta m = \dfrac{4m_2^2 - m_1^2}{m_1}$.