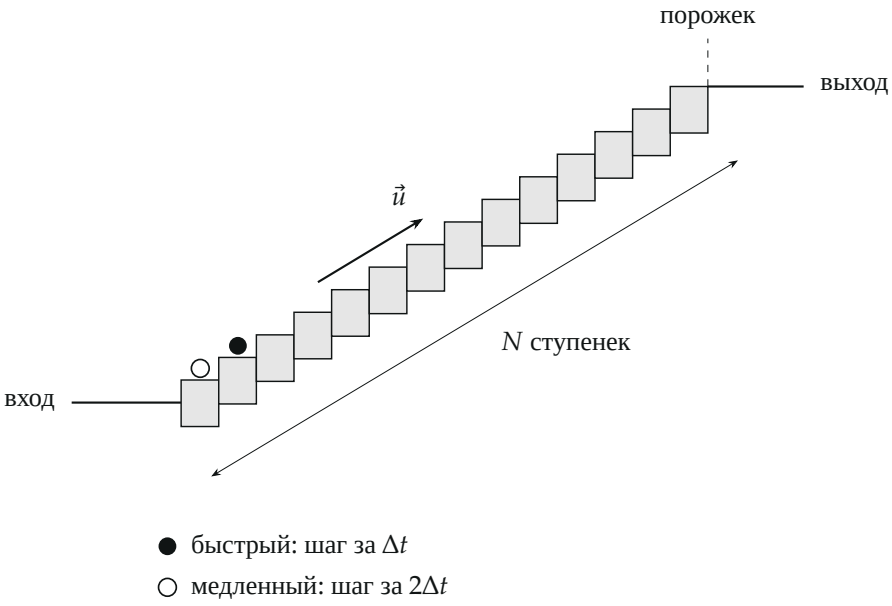
Эскалатор и двое друзей

Задача 2. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причём в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (все шаги делались на следующую ступеньку — через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому, кто шагал быстрее, пришлось сделать 32 шага, другому — 24 шага. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): эскалатор поднимает ступеньки со скоростью $\vec{u}$; между входом и порожком выхода помещаются N ступенек (на рисунке для наглядности нарисовано 14).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Эскалатор сам везёт людей вверх: часть пути человека «проезжает» эскалатор, часть он проходит ногами. Чтобы не следить за движением ступенек относительно земли, перейдём в систему отсчёта эскалатора. В ней ступеньки стоят на месте, человек идёт

по ним вверх, а порожек выхода едет навстречу ему вниз — со скоростью эскалатора. Они встречаются, когда путь человека по ступенькам плюс путь порожка равны всей длине эскалатора N ступенек.

Обозначения. N — число ступенек эскалатора между входом и выходом; Δt — время одного шага быстрого друга (медленный делает шаг за $2\Delta t$); w — число ступенек, которое проезжает под порожком выхода за время Δt (так выражена скорость эскалатора; w неизвестно). Скорости движения эскалатора и шагов постоянны.

1. Сколько времени шли друзья. Быстрый сделал 32 шага, на каждый ушло Δt:

$$t_1 = 32\,\Delta t.$$

Медленный сделал 24 шага по $2\Delta t$ на каждый:

$$t_2 = 24 \cdot 2\Delta t = 48\,\Delta t.$$

Каждый шаг — на следующую ступеньку, поэтому число шагов равно числу ступенек, которые человек прошёл относительно эскалатора.

2. Баланс ступенек у быстрого. В системе отсчёта эскалатора путь быстрого до порожка — 32 ступеньки (его шаги), а порожек за время t_1 проехал навстречу $w \cdot \dfrac{t_1}{\Delta t} = 32w$ ступенек. Вместе они проходят всю длину:

$$N = 32 + 32\,w.$$

3. Баланс ступенек у медленного. Он шёл $t_2 = 48\Delta t$: порожек проехал навстречу $48w$ ступенек, сам он сделал 24:

$$N = 24 + 48\,w.$$



Длина эскалатора N в системе отсчёта эскалатора. Бирюзовая часть — ступеньки, пройденные ногами; серая — ступеньки, которые «унёс» эскалатор (проехавшие мимо порожка). У обоих друзей сумма равна N.

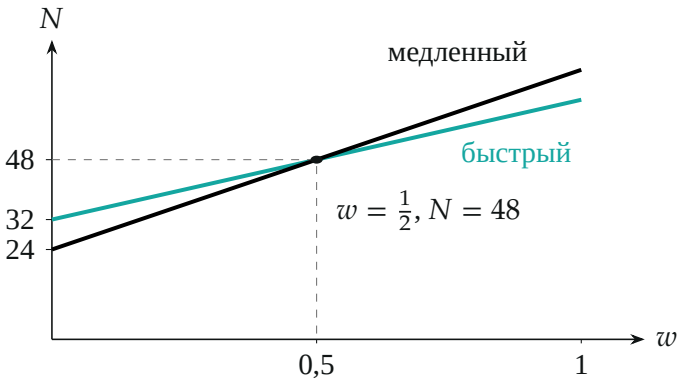
4. Решение. Неизвестных два — N и w, уравнений два. Приравняем правые части уравнений шагов 2 и 3 (ту же величину N записали дважды):

$$32 + 32w = 24 + 48w \;\Rightarrow\; 8 = 16w \;\Rightarrow\; w = \frac{1}{2},$$

тогда

$$N = 32 + 32 \cdot \frac{1}{2} = 48.$$

Скорость эскалатора — полступеньки за Δt.

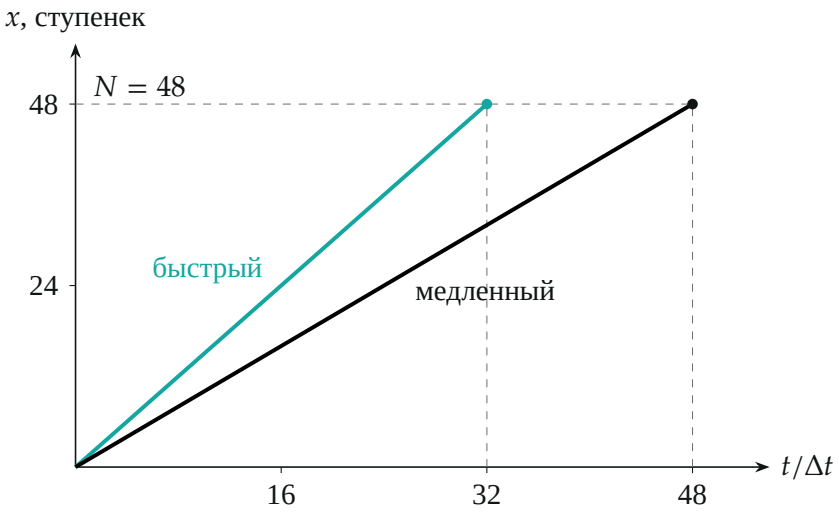


Левые части шагов 2 и 3 как функции w: быстрый — $N = 32 + 32w$, медленный — $N = 24 + 48w$. Единственное N определяется точкой пересечения: $w = 1/2$, $N = 48$.

5. Второй способ — система отсчёта земли. Быстрый поднимается относительно земли со скоростью (в ступеньках за Δt) $1 + w = \dfrac{3}{2}$ и проходит N за $32\Delta t$; медленный — со скоростью $\dfrac{1}{2} + w = 1$ и проходит те же N за $48\Delta t$:

$$N = \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) \cdot 32 = 48, \qquad N = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) \cdot 48 = 48.$$

Совпадение двух чисел — проверка того, что $w = \frac{1}{2}$ подобрано верно.



Положение друзей вдоль эскалатора (в ступеньках, отсчёт от входа) в системе отсчёта земли. Быстрый (бирюзовая прямая, 1,5 ступеньки за Δt) доходит до выхода за $32\Delta t$, медленный (чёрная прямая, 1 ступенька за Δt) — за $48\Delta t$; оба проходят $N = 48$.

Обратите внимание. Ступеньки, на которые каждый встал, считаются относительно эскалатора, а не земли: если бы эскалатор стоял, быстрому понадобилось бы 48 шагов, медленному — те же 48. Поэтому нельзя искать N как число шагов одного из друзей: часть ступенек «унёс» эскалатор. Это видно и по тому, что друзья сделали разное число шагов (32 и 24) на одном и том же эскалаторе.

Проверка. Размерность: N — число ступенек, w — число ступенек за интервал времени Δt, $w \cdot (t/\Delta t)$ — число ступенек. Предел: если бы эскалатор стоял ($w = 0$), оба досчитали бы до N шагов, и число 32 не могло бы отличаться от 24 — значит, $w > 0$, и действительно $w = \frac{1}{2}$. Второй способ дал то же $N = 48$.

Решение организаторов в PDF посчитано для другого варианта чисел, здесь — для чисел нашего условия.

Смысл такой: чем медленнее человек идёт, тем дольше его везёт эскалатор, тем больше ступенек унесено и тем меньше ему нужно пройти самому.

Ответ. $N = 48$ ступенек.