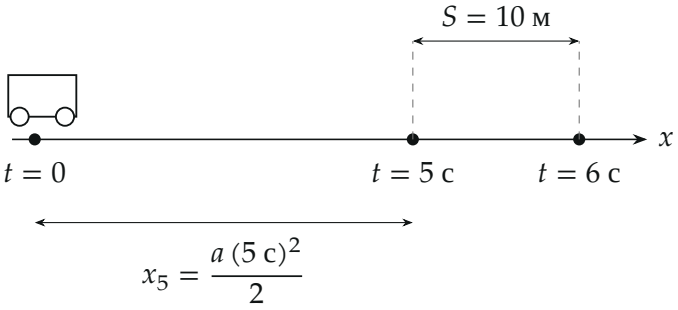
Путь за шестую секунду

Задача 3. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 3] Автомобиль начинает двигаться из состояния покоя с постоянным ускорением и за шестую секунду проходит путь $S = 10$ м. Найдите величину ускорения автомобиля.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): положения автомобиля на оси x в моменты $t = 0$, 5 с и 6 с. Шестая секунда — промежуток между 5-й и 6-й секундами от начала движения.

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль разгоняется равномерно из покоя. «За шестую секунду» — это промежуток времени от $t_5 = 5$ с до $t_6 = 6$ с, длиной 1 с. Путь за этот промежуток — разность координат в его конце и в начале. Пути при равноускоренном движении из покоя растут как квадрат времени, поэтому разность квадратов $6^2 - 5^2$ и определит ускорение.

Обозначения. a — ускорение; ось x — вдоль движения, начало — там, где автомобиль стоял при $t = 0$. $x(t)$ — координата. Движение в одну сторону без остановок, поэтому путь равен изменению координаты.

1. Закон движения. Из покоя: $v_0 = 0$, $x_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{at^2}{2}.$$

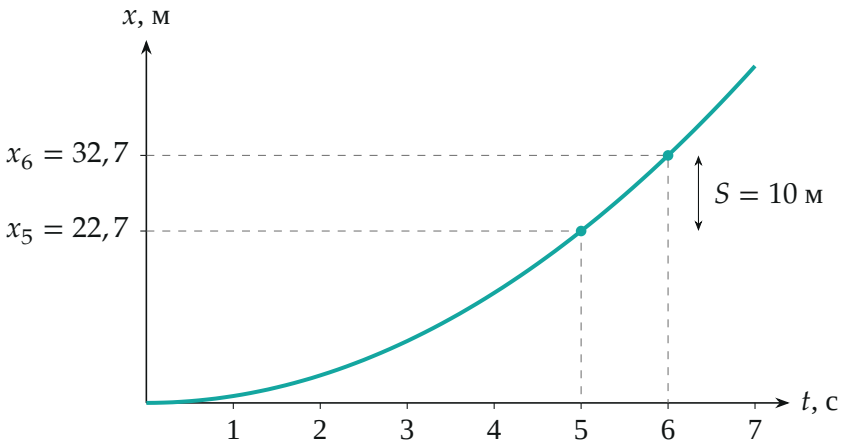
Применимость: ускорение постоянно с момента $t = 0$.

2. Путь за шестую секунду. Координаты в начале и в конце шестой секунды:

$$x_5 = \frac{a\,t_5^2}{2}, \qquad x_6 = \frac{a\,t_6^2}{2}, \qquad t_5 = 5\text{ с},\ t_6 = 6\text{ с}.$$

Путь S — их разность:

$$S = x_6 - x_5 = \frac{a\left(t_6^2 - t_5^2\right)}{2} = \frac{a\,(36-25)}{2}\,\text{с}^2 = \frac{11}{2}\,a\cdot(1\ \text{с}^2).$$



Координата автомобиля $x(t) = at^2/2$ при $a = 20/11 \approx 1{,}82$ м/с^2. Расстояние между точками $x_5 = 22{,}7$ м и $x_6 = 32{,}7$ м по вертикали — путь за шестую секунду.

3. Ускорение. Выражаем a:

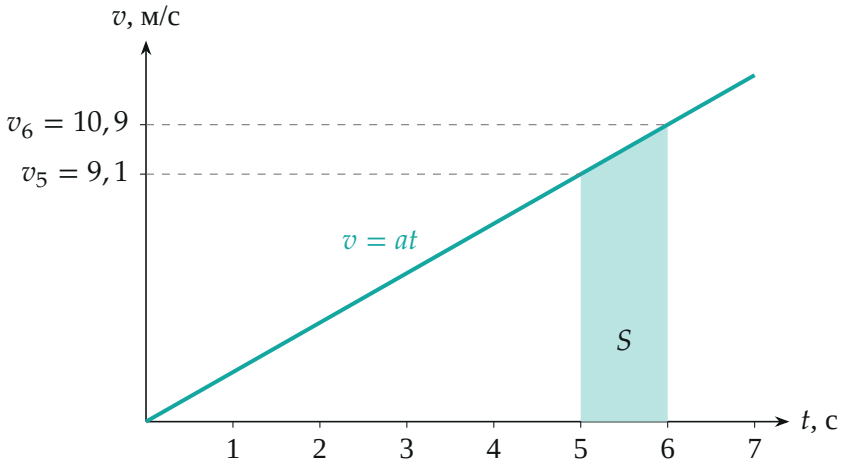
$$a = \frac{2S}{t_6^2 - t_5^2} = \frac{2\cdot 10\text{ м}}{(36-25)\ \text{с}^2} = \frac{20}{11}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 1{,}82\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

4. Второй способ — площадь под графиком скорости. Скорость растёт линейно: $v = at$. В начале шестой секунды $v_5 = 5a$, в конце

$v_6 = 6a$. Путь за промежуток 1 с — площадь трапеции под графиком:

$$S = \frac{v_5 + v_6}{2} \cdot (1\text{ с}) = \frac{5a + 6a}{2} \cdot 1\text{ с} = 5{,}5\,a \cdot 1\text{ с}^2.$$

Приравняв к 10 м, получаем $a = \dfrac{10}{5{,}5} = \dfrac{20}{11}$ м/с^2 — то же самое. Заодно видно: путь за секунду равен скорости в её середине (в $t = 5{,}5$ с).

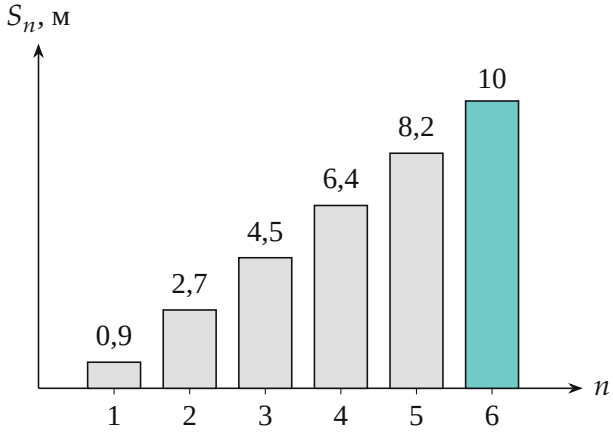


Скорость $v = at$. Закрашенная трапеция — путь за шестую секунду $S = (v_5 + v_6)/2 \cdot 1$ с; при $a = 20/11$ получаем $v_5 = 9{,}1$ м/с, $v_6 = 10{,}9$ м/с.

5. Третий способ — пути по секундам. Путь за n-ю секунду

$$S_n = \frac{a\,(n^2 - (n-1)^2)}{2} \cdot 1\text{ с}^2 = \frac{a\,(2n-1)}{2} \cdot 1\text{ с}^2,$$

то есть пути за последовательные секунды относятся как нечётные числа: $S_1 : S_2 : S_3 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots$ Для $n = 6$ множитель $2n - 1 = 11$, $S_6 = \frac{11}{2}a \cdot 1\text{ с}^2$, что снова приводит к $a = \frac{2S}{11}$.



Путь за каждую из первых шести секунд при $a = 20/11$ м/с^2 (в метрах): 0,9; 2,7; 4,5; 6,4; 8,2; 10 — относятся как 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11. Бирюзовым выделена шестая секунда.

Обратите внимание. За шестую секунду автомобиль прошёл 10 м, а не за шесть секунд: если подставить $S = 10$ м в $S = at^2/2$ с $t = 6$ с, получится неверное $a \approx 0{,}56$ м/с^2 — это ускорение, при котором 10 м проходят за шесть секунд, а не за шестую. Различать «путь за t секунд» и «путь за t-ю секунду» — главное в этой задаче.

Проверка. Размерность: $2S/\Delta(t^2)$ — м/с^2. Предел: для первой секунды ($t_5 = 0$, $t_6 = 1$ с) формула даёт $a = 2S/(1\ \text{с}^2)$, как и следует из $S = at^2/2$ при $t = 1$ с. Три способа дали одно число; подстановка: $x_6 - x_5 = \frac{20}{11} \cdot \frac{36-25}{2} = 10$ м.

Решение организаторов в PDF посчитано для другого варианта чисел, здесь — для чисел нашего условия.

Смысл такой: чем позже секунда, тем больше путь за неё; поэтому 10 м за шестую секунду соответствуют скромному ускорению меньше 2 м/с^2.

Ответ. $a = \dfrac{2S}{t_6^2 - t_5^2} = \dfrac{20}{11} \approx 1{,}82$ м/с^2.