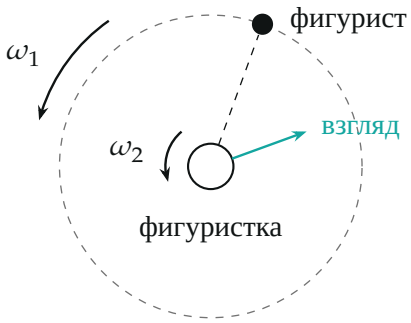
Фигуристы вращаются

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Фигуристы исполняют следующий элемент: фигуристка вращается с постоянной скоростью вокруг своей оси, фигурист также с постоянной скоростью совершает обороты вокруг партнёрши (в том же направлении). Известно, что фигурист сделал два полных оборота вокруг партнёрши за время $t = 8$ секунд, за это время фигуристка $n = 7$ раз повернулась лицом к своему партнёру, причём первый раз (из этих 7) фигуристка была повернута к нему лицом в самом начале элемента, последний — в конце. За какое время фигуристка совершает один оборот?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): вид сверху. Фигуристка в центре поворачивается вокруг своей оси с угловой скоростью ω_2 (бирюзовая стрелка — куда она смотрит), фигурист движется по окружности вокруг неё с угловой скоростью ω_1; пунктир — направление на фигуриста.

▲ **Решение. Что происходит.** Фигуристка смотрит на партнёра, когда направление её «взгляда» совпадает с направлением на него. Оба направления поворачиваются в одну сторону, причём «взгляд» быстрее, поэтому он обгоняет направление на партнёра, и каждый раз, когда обгон достигает целого оборота, они совпадают снова. Всего совпадений семь, первое и последнее — на краях элемента, значит между ними шесть промежутков, то есть за 8 с «взгляд» обогнал направление на партнёра ровно на 6 оборотов. Остаётся записать этот обгон через периоды.

Обозначения. T_1 — время одного оборота фигуриста вокруг партнёрши, T_2 — время одного оборота фигуристки вокруг своей оси (искомое); $\omega_1 = 2\pi/T_1$, $\omega_2 = 2\pi/T_2$ — угловые скорости. Углы отсчитываем от неподвижного направления, в котором фигурист находился в начале; $\varphi_1(\tau) = \omega_1\tau$ — направление на фигуриста в момент τ, $\varphi_2(\tau) = \omega_2\tau$ — направление «взгляда» (в начале они совпадают: она смотрит на него). Вращения в одну сторону, $\omega_1, \omega_2 > 0$.

1. Период фигуриста. Два полных оборота за $t = 8$ с:

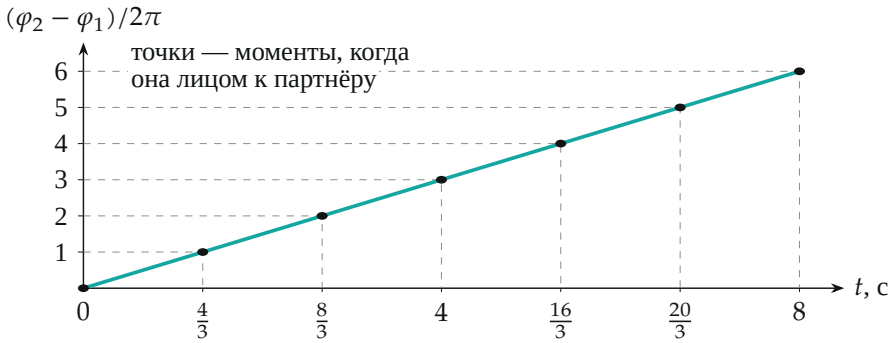
$$T_1 = \frac{t}{2} = 4\text{ с}, \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{4\text{ с}}.$$

2. Условие «лицом к партнёру». Она смотрит на него, когда $\varphi_2 - \varphi_1$ кратно полному обороту:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)\tau = 2\pi k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из семи моментов первый ($k = 0$) — начало, последний — конец элемента, то есть $k = n - 1 = 6$ при $\tau = t$. Значит, за всё время разность углов набрала шесть оборотов:

$$(\omega_2 - \omega_1)\, t = 2\pi\,(n - 1).$$



Разность $(\varphi_2 - \varphi_1)/2\pi$ (в оборотах) как функция времени; она растёт линейно, и каждый целый оборот — момент, когда фигуристка лицом к партнёру. Для найденных ниже $T_2 = 1$ с и $T_1 = 4$ с моменты — 0; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$; 4; $\frac{16}{3}$; $\frac{20}{3}$; 8 с.

3. Периоды. Подставим $\omega_{1,2} = 2\pi/T_{1,2}$ и поделим на 2π:

$$\Big(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\Big)t = n - 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{T_2} = \frac{n-1}{t} + \frac{1}{T_1} = \frac{n-1}{t} + \frac{2}{t} = \frac{n+1}{t}.$$

$$T_2 = \frac{t}{n+1} = \frac{8\text{ с}}{8} = 1\text{ с}.$$

Условие $\omega_2 > \omega_1$ выполнено: $T_2 = 1\text{ с} < T_1 = 4\text{ с}$.

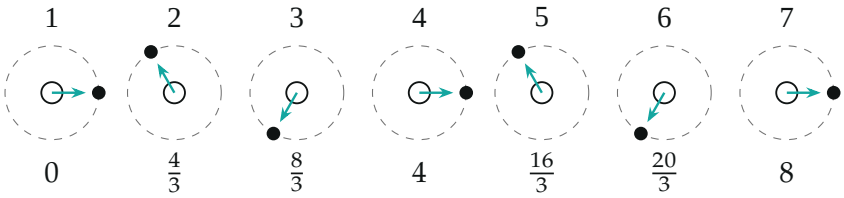
4. Второй способ — система отсчёта фигуристки. Свяжем систему отсчёта с фигуристкой, вращающейся вместе с ней. В ней она неподвижна, а фигурист обходит её в обратную сторону с угловой скоростью $\omega_2 - \omega_1$ (скорости вращений вычитаются). Фигуристка видит партнёра прямо перед собой, когда он делает полный оборот в этой системе, то есть через время $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Шесть таких оборотов занимают всё время:

$$6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = t \;\Rightarrow\; \omega_2 - \omega_1 = \frac{2\pi \cdot 6}{8\text{ с}} = \frac{2\pi}{4/3\text{ с}},$$

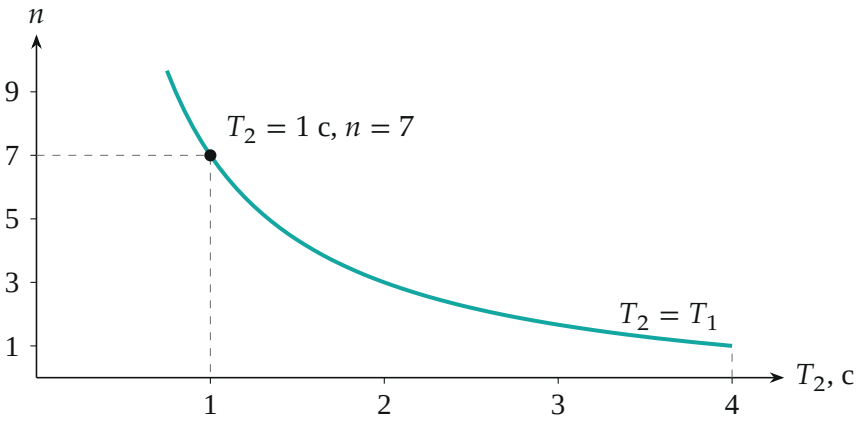
то есть

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{4\text{ с}} + \frac{3}{4\text{ с}} = \frac{1}{1\text{ с}},$$

тот же результат. Моменты «лицом к партнёру» идут через $\frac{4}{3}$ с.



Вид сверху в семь моментов «лицом к партнёру» (цифры сверху — номера моментов, внизу — время t в секундах). Бирюзовая стрелка — взгляд, точка — фигурист. Фигурист за $\frac{4}{3}$ с поворачивается на $120°$, поэтому его положения повторяются через три момента.



Сколько раз n фигуристка повернётся лицом к партнёру за 8 с, в зависимости от её периода T_2: $n = \frac{t}{T_2} - \frac{t}{T_1} + 1 = \frac{8}{T_2} - 1$. Условию $n = 7$ отвечает $T_2 = 1$ с.

Обратите внимание. Повернуться лицом к партнёру семь раз — не значит сделать семь оборотов: она оборачивается вокруг оси $t/T_2 = 8$ раз, но фигурист за это время тоже сместился на два оборота, поэтому «лишних» оборотов у неё $8-2=6$, и совпадений вместе с начальным — $6+1=7$. Если считать семь оборотов, получится неверное $T_2 = 8/7$ с.

Проверка. Размерность: $t/(n+1)$ — время. Предел: если фигурист стоит ($T_1 \to \infty$), то $n - 1 = t/T_2$, как и должно быть для вращения на месте; в формуле $1/T_2 = (n-1)/t + 1/T_1$ это даёт $T_2 = t/(n-1)$. Прямая подстановка: $t/T_2 = 8$ её оборотов, $t/T_1 = 2$ оборота фигуриста, разность $8 - 2 = 6 = n - 1$.

Смысл такой: все семь совпадений укладываются в шесть промежутков по $4/3$ с, а фигуристка при периоде 1 с успевает за это время повернуться на $4/3$ оборота — на целый оборот больше, чем фигурист на $1/3$ своего.

Ответ. $T_2 = \dfrac{t}{n+1} = 1$ с.