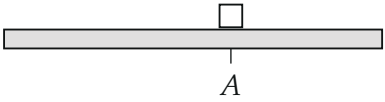
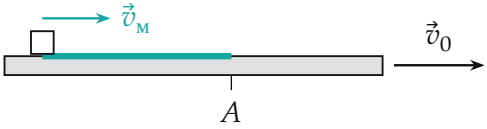
След мела на доске

Задача 5. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 5] На горизонтальной доске лежит мел. Коэффициент трения между доской и мелом $k = 0{,}3$. Доске резко сообщают горизонтальную скорость $v_0 = 4$ м/с, а через время $\tau = 1$ с резко останавливают. Найти длину следа мела на доске. Считать, что при скольжении по доске мел оставляет след; если мел движется по уже оставленному следу, то длина следа не изменяется. $g = 10$ м/с^2.

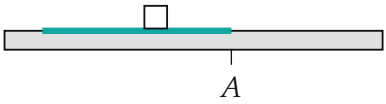
$t = 0$: доска и мел покоятся



$t = \tau = 1$ с: доску резко останавливают



мел остановился ($t = 2$ с)



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): вид сбоку в три момента. Бирюзовая полоса — след мела на доске, A — точка доски, в которой мел лежал вначале; стрелки скоростей мела и доски в масштабе (3 и 4 м/с), расстояния вдоль доски — в метрах.

▲ **Решение. Что происходит.** Мел и доска связаны только трением. Когда доску резко сдвигают, мел сначала остаётся на месте, то есть скользит по ней назад; трение скольжения тянет мел вперёд и разгоняет с ускорением kg. Через время τ доску резко останавливают, мел ещё движется вперёд и теперь скользит по неподвижной доске вперёд, пока не остановится. Главная идея: следить за положением мела на доске — по

координате ξ, отсчитанной вдоль доски от точки A, где мел лежал в начале. След — это отрезок, который мел успел обойти; длина следа равна наибольшему удалению мела от точки A, если ни разу он не вышел за неё в другую сторону.

Обозначения. x — ось по земле вдоль скорости доски, $x = 0$ — начальное положение мела; $x_д = v_0 t$ — координата точки A доски; $\xi = x_м - x_д$ — положение мела на доске относительно A (при $t = 0$ равно нулю); $a = kg$; S_1 — длина следа после первого этапа. Остановку и толчок доски считаем мгновенными.

1. Ускорение мела. Пока мел скользит по доске, на него действует сила трения скольжения $F_{тр} = kN = kmg$ (в вертикальном направлении $N = mg$). Она направлена против скольжения мела по доске: скольжение — назад (доска убегает вперёд), поэтому сила трения — вперёд, а ускорение

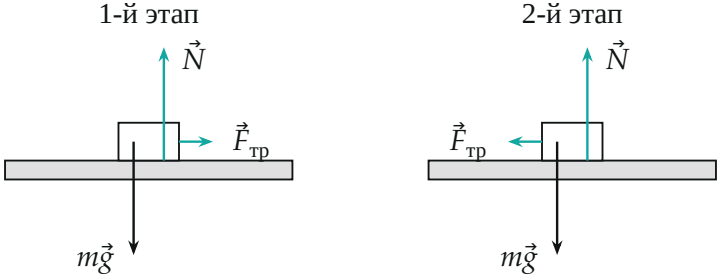
$$a = \frac{F_{тр}}{m} = kg = 0{,}3 \cdot 10 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Применимо, пока мел скользит; если бы мел набрал скорость доски, сила трения исчезла бы.

2. Успевает ли мел набрать скорость доски. Мел достиг бы скорости доски через

$$t_* = \frac{v_0}{kg} = \frac{4}{3} \text{ с} \approx 1{,}33 \text{ с},$$

а доску останавливают раньше: $\tau = 1$ с $< t_*$. Значит, на всём первом этапе мел скользит.



Силы на мел: тяжесть $m\vec{g}$, реакция доски $\vec{N}$ ($N = mg$) и трение скольжения $\vec{F}_{тр}$ ($F_{тр} = kmg$). На первом этапе мел отстаёт от едущей доски — трение

действует вперёд; на втором доска стоит, а мел едет вперёд — трение действует назад. Длины стрелок N и mg равны; $F_{тр} = 0{,}3\,mg$.

3. Первый этап ($0 < t < \tau$). Координаты доски и мела (мел стартует из покоя с ускорением a):

$$x_д = v_0 t, \qquad x_м = \frac{kg\,t^2}{2}, \qquad v_м = kg\,t.$$

К моменту остановки доска прошла $v_0\tau = 4$ м, мел — $\dfrac{kg\tau^2}{2} = 1{,}5$ м и имеет скорость $v_1 = kg\tau = 3$ м/с $< v_0$. Положение мела на доске:

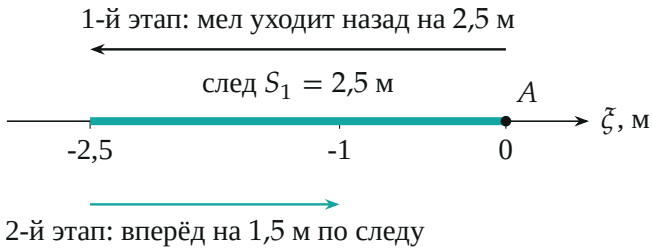
$$\xi(\tau) = x_м - x_д = \frac{kg\tau^2}{2} - v_0\tau = 1{,}5 - 4 = -2{,}5 \text{ м},$$

то есть мел отъехал назад по доске на $S_1 = v_0\tau - \dfrac{kg\tau^2}{2} = 2{,}5$ м и нарисовал след длиной 2,5 м.

4. Второй этап ($t > \tau$). Доска неподвижна, мел имеет скорость $v_1 = 3$ м/с вперёд и скользит вперёд по доске. Трение теперь направлено назад (против скольжения), ускорение $-kg$ по модулю то же. Путь до остановки

$$S_2 = \frac{v_1^2}{2kg} = \frac{(kg\tau)^2}{2kg} = \frac{kg\tau^2}{2} = 1{,}5 \text{ м}.$$

Мел идёт вперёд по доске, то есть возвращается по уже нарисованному следу. Так как $S_2 = 1{,}5$ м $< S_1 = 2{,}5$ м, он не доходит до точки A ($\xi_{кон} = -2{,}5 + 1{,}5 = -1{,}0$ м) и нового следа не оставляет.



Положение мела на доске ξ (от точки A): на первом этапе мел уходит назад

на 2,5 м (след), на втором возвращается вперёд на 1,5 м по следу и останавливается в точке $\xi = -1{,}0$ м.

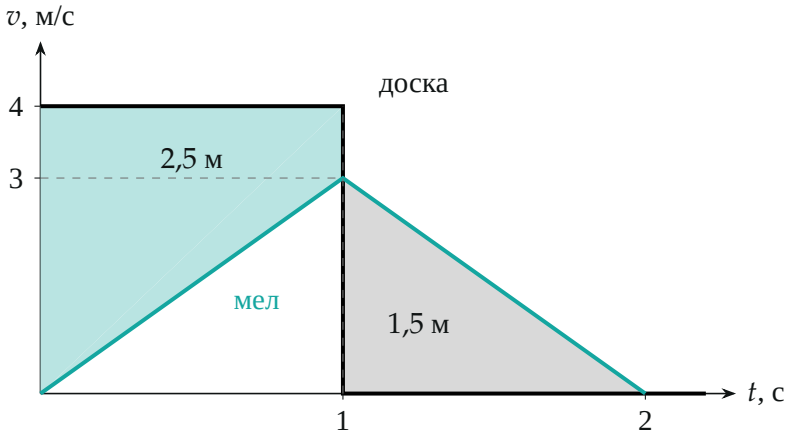
5. Длина следа. Мел побывал на отрезке $-2{,}5\text{ м} \leqslant \xi \leqslant 0$ доски, и дальше этого отрезка не выходил. Длина следа

$$S = S_1 = v_0\tau - \frac{kg\tau^2}{2} = 4 \cdot 1 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} = 2{,}5\text{ м}.$$

6. Второй способ — площадь между графиками скоростей. Смещение мела по доске равно интегралу от относительной скорости $v_м - v_д$. На первом этапе это площадь между горизонталью $v = v_0$ и прямой $v = kgt$ — трапеция с основаниями 4 и 1 и высотой 1:

$$S_1 = \frac{(v_0 - 0) + (v_0 - kg\tau)}{2}\,\tau = \frac{4+1}{2} \cdot 1 = 2{,}5\text{ м}.$$

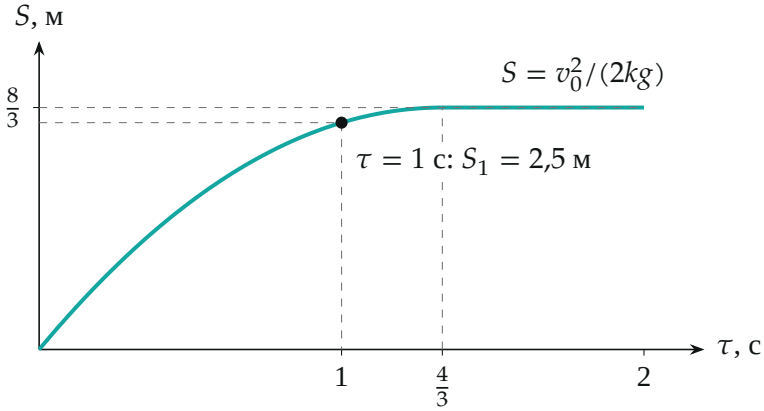
На втором этапе доска неподвижна, и площадь под графиком мела (треугольник $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1$) — это 1,5 м смещения вперёд.



Скорости доски (чёрная линия) и мела (бирюзовая). Бирюзовая закраска — площадь между ними на первом этапе: 2,5 м назад по доске; серая — треугольник под графиком мела на втором этапе: 1,5 м вперёд по доске.

Обратите внимание. При мгновенной остановке доски мел не останавливается вместе с ней — у него есть скорость $kg\tau$. Поэтому второй

этап существует, и важно проверить, что его путь меньше пути первого этапа: только тогда нового следа нет. Если бы τ было больше $v_0/(kg) = 4/3$ с, мел успел бы приобрести скорость доски и след был бы длиной $v_0^2/(2kg) = 8/3 \approx 2{,}67$ м, независимо от τ (ниже на графике).



Длина следа в зависимости от времени τ до остановки: $S = v_0\tau - kg\tau^2/2$ при $\tau \leqslant v_0/(kg) = 4/3$ с и $S = v_0^2/(2kg) = 8/3$ м при больших τ. Точка — наш случай $\tau = 1$ с.

Проверка. Размерность: $v_0\tau$ и $kg\tau^2$ — метры. Предел: при $\tau \to 0$ след $S \to 0$ (доска остановилась, мел не успел сдвинуться); при $\tau = v_0/(kg) = 4/3$ с первая формула даёт $S_1 = \frac{16}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9} = \frac{8}{3} = \frac{v_0^2}{2kg}$ — ровно значение второй, график непрерывен. Два способа дали 2,5 м.

Решение организаторов в PDF посчитано для другого варианта чисел, здесь — для чисел нашего условия.

Смысл такой: за короткое время мел успевает отъехать назад на 2,5 м, а вернуться — только на 1,5 м, поэтому след определяется первым этапом.

Ответ. $S = v_0\tau - \dfrac{kg\tau^2}{2} = 2{,}5$ м.