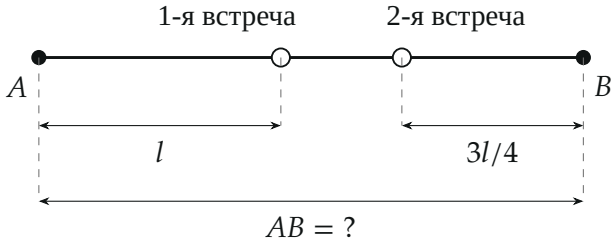
Две встречи машин

Задача 1. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Машины встретились на расстоянии l от A, затем доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от города B. Найти расстояние AB. Скорости машин постоянны.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): дорога от города A до города B, места двух встреч и данные условия. Расстояние AB нужно найти; на рисунке оно взято в масштабе ответа.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Скорости машин постоянны, поэтому путь каждой машины растёт пропорционально времени. Главная идея — сложить пути обеих машин. Когда они едут навстречу друг другу, вместе до встречи они проезжают ровно расстояние между городами S. До второй встречи они вместе проезжают S (до первой встречи), ещё S (от первой встречи до чужих городов) и ещё S (после разворотов до второй встречи) — всего $3S$. Значит, до второй встречи прошло втрое больше времени, чем до первой, и каждая машина проехала втрое больший путь.

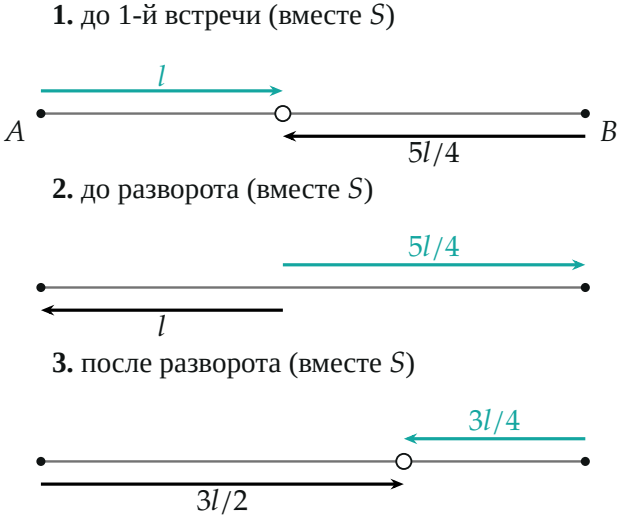
Обозначения. $S = AB$ — искомое расстояние; v_1 — скорость машины из A, v_2 — машины из B; t_1 — время от старта до первой встречи, t_2 — до второй; l — расстояние первой встречи от A. Развороты считаем мгновенными. Обе встречи — лоб в лоб: после разворота машина из A едет к A, а машина из B — к B.

1. До первой встречи. Машины стартовали одновременно навстречу друг другу, поэтому вместе проехали всё расстояние между городами:

$$v_1 t_1 = l, \qquad v_2 t_1 = S - l, \qquad (v_1 + v_2)\, t_1 = S.$$

2. Три участка пути. Разобьём путь каждой машины на три участка (рисунок ниже): 1) от старта до первой встречи; 2) от первой встречи до чужого города; 3) от разворота в чужом городе до второй встречи. Участки у двух машин кончаются в разные моменты, но длины складывать можно. Для двух машин вместе:

участок 1: $l + (S - l) = S$ (шаг 1); участок 2: машина из A проезжает $S - l$ до города B, машина из B — l до города A, вместе S; участок 3: машина из A проезжает $3l/4$ от B до места встречи, машина из B — от A до того же места, то есть $S - 3l/4$, вместе тоже S.



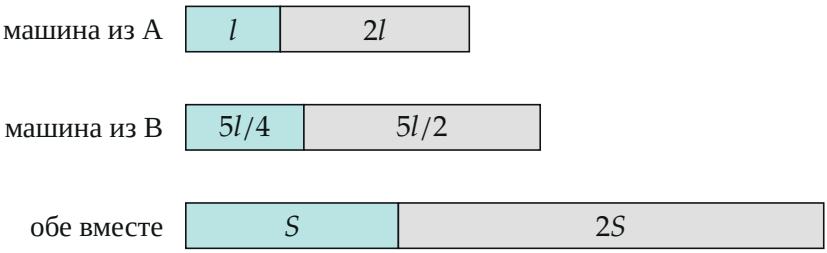
Три участка пути каждой машины. Бирюзовые стрелки — машина из A, чёрные — машина из B; длины пропорциональны путям при $S = \frac{9}{4}\, l$. На каждом участке сумма путей двух машин равна S (например, участок 3: $\frac{3}{4}\, l + \frac{3}{2}\, l = \frac{9}{4}\, l$).

3. Во сколько раз до второй встречи ехали дольше. Обе машины всё время едут с постоянными скоростями, поэтому сумма их пройденных путей растёт с одной и той же скоростью $v_1 + v_2$ (направление дви-

жения не важно — речь о длине пройденного). До первой встречи сумма была S, до второй — $S + S + S = 3S$. Поэтому

$$t_1 = \frac{S}{v_1 + v_2}, \qquad t_2 = \frac{3S}{v_1 + v_2} = 3t_1.$$

От первой встречи до второй проходит $t_2 - t_1 = 2t_1$ — вдвое больше, чем от старта до первой.



Накопленные пути (бирюзовым — до первой встречи, серым — от первой до второй) при $S = \frac{9}{4}l$. До второй встречи каждая машина проехала втрое больше, чем до первой: $3l$ и $\frac{15}{4}l$; вместе — $3S$.

4. Путь машины из A до второй встречи. Скорость постоянна, времени втрое больше, значит и путь втрое больше: $v_1 t_2 = 3v_1 t_1 = 3l$. С другой стороны, по карте эта машина проехала из A до B (путь S) и ещё $3l/4$ от B назад до места второй встречи:

$$3l = S + \frac{3}{4}l \quad \Rightarrow \quad S = 3l - \frac{3}{4}l = \frac{9}{4}l.$$

5. Проверка геометрией (машина из B). Из шага 1: $v_2 t_1 = S - l = \frac{5}{4}l$, значит до второй встречи $v_2 t_2 = 3 \cdot \frac{5}{4}l = \frac{15}{4}l$. По карте машина из B проехала S до города A и вернулась от A на $S - \frac{3}{4}l = \frac{3}{2}l$: $\frac{9}{4}l + \frac{3}{2}l = \frac{15}{4}l$. Сошлось — значит, $S = \frac{9}{4}l$ согласуется и с данными второй машины.

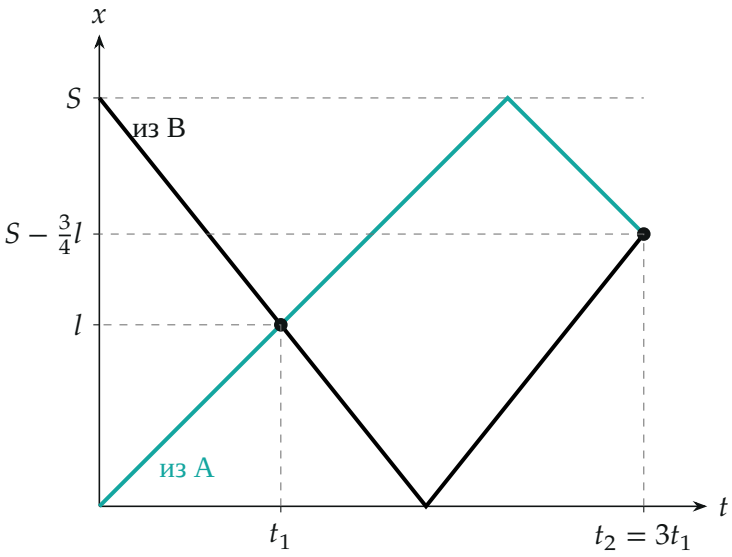


График $x(t)$ (координата вдоль дороги от A, время в единицах t_1): бирюзовая — машина из A, чёрная — из B. Пересечения (точки) — встречи: первая при t_1 на расстоянии l от A, вторая при $3t_1$ на расстоянии $S-\frac{3}{4}l=\frac{3}{2}l$ от A. Скорости $v_1=l/t_1$ и $v_2=\frac{5}{4}l/t_1$.

Обратите внимание. Время «вдвое больше» относится к промежутку между встречами, а «втрое больше» — ко всему времени от старта до второй встречи. Путать их — главная ловушка: если приравнять путь до второй встречи $2l$ (вдвое больше, чем до первой), получится $2l=S+\frac{3}{4}l$ и неверное $S=\frac{5}{4}l$; с втрое большим путём $3l$ получается верное $\frac{9}{4}l$.

Проверка. Размерность: $\frac{9}{4}l$ — длина. Общая формула из шага 4: расстояние второй встречи от B равно $x=3l-S$. Предел: при равных скоростях $l=S/2$ машины приезжают в чужие города одновременно и обе встречи происходят в середине дороги; формула даёт $x=\frac{3}{2}S-S=S/2$, как и должно быть. Для наших данных $x=3l/4$, отсюда $S=3l-x=\frac{9}{4}l$, а скорости относятся как $v_1:v_2=l:(S-l)=4:5$ — вторая машина быстрее.

Смысл такой: за одно и то же время сумма путей двух машин одна и та же, поэтому три «полных» расстояния до второй встречи против одного до первой сразу дают отношение 3 : 1 для времён и путей.

Ответ. $AB = \dfrac{9}{4}\,l.$