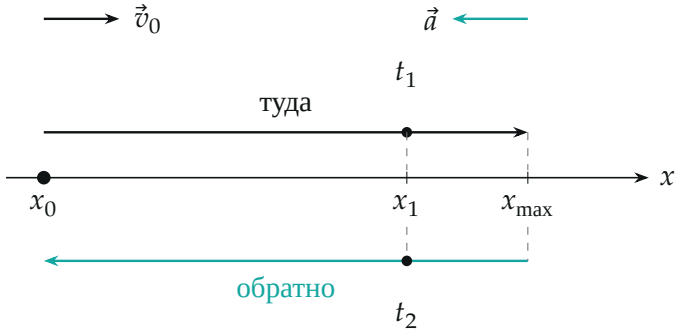
Дважды в одной точке

Задача 4. [Росатом 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Тело движется с постоянным ускорением вдоль некоторой оси, стартуя в момент времени $t = 0$ из точки с координатой x_0 с некоторой начальной скоростью. Известно, что в точке с координатой x_1 ($x_1 > x_0$) тело побывало дважды — в моменты времени t_1 и t_2. Какой путь пройдёт тело до того момента времени, когда его скорость станет равна начальной?



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): тело стартует из x_0 со скоростью $\vec{v}_0$, ускорение $\vec{a}$ направлено против неё, поэтому оно доходит до крайней точки x_{max} и возвращается; точку x_1 проходит дважды — в моменты t_1 (туда) и t_2 (обратно).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Если тело побывало в одной точке дважды, оно разворачивалось: ускорение направлено против начальной скорости. График координаты — парабола, симметричная относительно вершины; вершина — момент остановки. Раз в x_1 тело было в моменты t_1 и t_2, оно остановилось ровно посередине между ними, а скорость по модулю снова станет равна начальной, когда тело вернётся в x_0, то есть через вдвое большее время, чем до остановки. Путь — это путь туда до остановки плюс такой же путь обратно.

Обозначения. Ось x направим вдоль $\vec{v}_0$, $a > 0$ — модуль ускорения (оно направлено против оси). t_0 — момент остановки (скорость нуль),

$d = x_1 - x_0 > 0$, $x_{\max}$ — крайняя точка, S — искомый путь. Под «скоростью, равной начальной» понимаем равенство модулей: вектор скорости к тому моменту направлен противоположно $\vec{v}_0$.

1. Законы движения.

$$v(t) = v_0 - at, \qquad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Применимо на всём движении, пока ускорение постоянно.

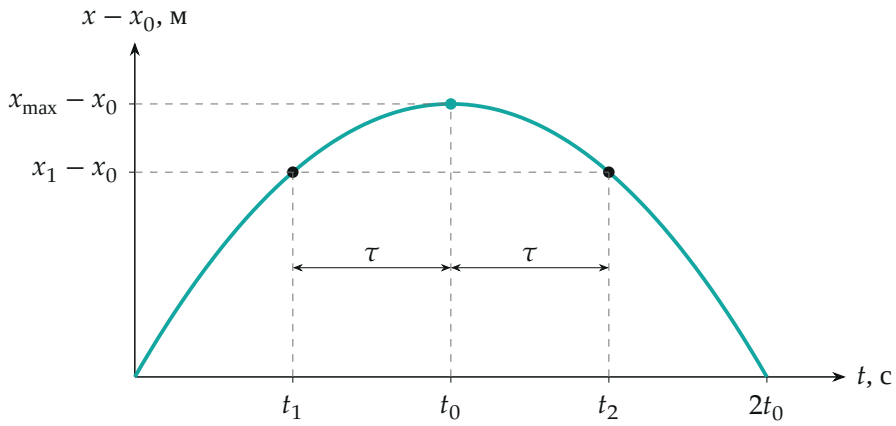
2. Момент остановки. В моменты t_1 и t_2 координата одна и та же, $x(t_1) = x(t_2) = x_1$, то есть t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения

$$\frac{a}{2}\,t^2 - v_0 t + d = 0.$$

По теореме Виета сумма корней $t_1 + t_2 = \dfrac{2v_0}{a}$, произведение $t_1 t_2 = \dfrac{2d}{a}$. Остановка: $v(t_0) = 0$, то есть $t_0 = \dfrac{v_0}{a}$, поэтому

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Тот же результат без алгебры: движение от x_1 до точки остановки и обратно в x_1 занимает одно и то же время τ (парабола симметрична), поэтому $t_0 - t_1 = t_2 - t_0 = \tau$.



Координата $x - x_0$ как функция времени для примера $x_0 = 0$, $v_0 = 4$ м/с, $a = 2$ м/с^2 (тогда $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3$ с, $x_1 = 3$ м): парабола, вершина в $t_0 = (t_1 + t_2)/2 = 2$ с, точка x_1 проходится при t_1 и t_2, на равных интервалах τ по обе стороны от вершины.

3. Ускорение и начальная скорость. Из Виета:

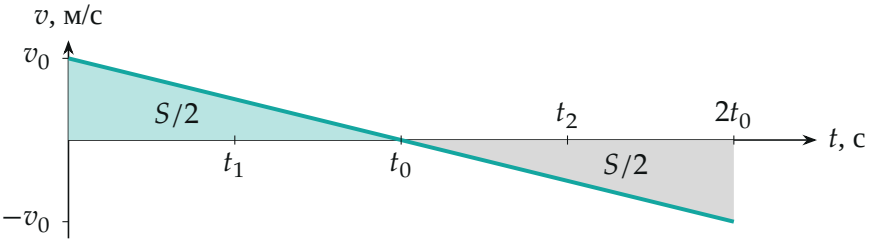
$$a = \frac{2d}{t_1 t_2} = \frac{2(x_1 - x_0)}{t_1 t_2}, \qquad v_0 = a t_0 = \frac{a\,(t_1 + t_2)}{2} = \frac{(x_1 - x_0)(t_1 + t_2)}{t_1 t_2}.$$

4. Момент, когда скорость снова равна по модулю начальной. При $t = 2t_0$: $v(2t_0) = v_0 - 2at_0 = -v_0$. Это момент возврата в x_0: $x(2t_0) = x_0 + 2v_0 t_0 - 2at_0^2 = x_0$ при $at_0 = v_0$. Время $2t_0 = t_1 + t_2$.

5. Путь. Тело идёт от x_0 до точки остановки и обратно, всё время в одну сторону на каждом участке, поэтому путь — удвоенное расстояние до остановки:

$$S = 2\,(x_{\max} - x_0) = 2 \cdot \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{a} = \frac{a\,(t_1 + t_2)^2}{4} = \frac{(x_1 - x_0)\,(t_1 + t_2)^2}{2\,t_1 t_2},$$

где в конце подставлено a из шага 3.



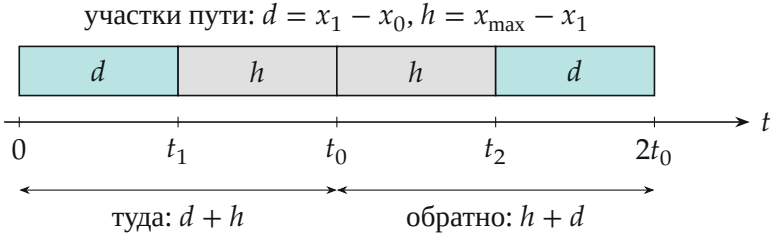
Скорость $v(t) = v_0 - at$ (тот же пример). Путь до остановки — площадь треугольника (бирюзовая, $S/2 = \frac{1}{2} v_0 t_0$); обратный путь — площадь такого же треугольника под осью (серая); полный путь $S = v_0 t_0 = v_0^2/a$ (смещение за это время — нуль).

6. Второй способ — площади на графике скорости. До остановки скорость уменьшается линейно от v_0 до нуля за t_0, поэтому путь равен площади треугольника $\frac{1}{2} v_0 t_0$. После остановки скорость растёт по модулю от нуля до v_0 тоже за t_0 — второй такой же треугольник. Весь

путь

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}v_0t_0 = v_0t_0 = \frac{(x_1-x_0)(t_1+t_2)}{t_1t_2}\cdot\frac{t_1+t_2}{2} = \frac{(x_1-x_0)(t_1+t_2)^2}{2t_1t_2},$$

то же самое.



Время $0 \to 2t_0$ и пути на участках (в примере $d = 3$ м, $h = 1$ м): от x_0 до x_1 — d (время t_1), от x_1 до $x_{\max}$ — h (время $t_0 - t_1$), и ещё раз h, d на обратном пути. $S = 2(d + h) = 8$ м.

Обратите внимание. Путь S — это не перемещение: за время $t_1 + t_2$ тело вернулось в x_0, перемещение нулевое, а путь — удвоенное расстояние до точки остановки. Ещё одна ловушка: x_1 не является точкой остановки (в ней тело побывало дважды в разные моменты, а не один), поэтому $S \neq 2(x_1 - x_0)$; $S > 2(x_1 - x_0)$, потому что тело уходит дальше x_1.

Проверка. Размерность: $\dfrac{(x_1-x_0)(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}$ — метр. Числовой пример: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3$ с, $x_1 - x_0 = 3$ м: $a = 2\cdot3/3 = 2$ м/с^2, $v_0 = 2\cdot2 = 4$ м/с, $S = 3\cdot16/(2\cdot3) = 8$ м; независимо, $x_{\max} - x_0 = v_0^2/(2a) = 4$ м, $S = 2\cdot4 = 8$ м — сошлось. Предел: если $t_1 \to t_2 = t$ (точка x_1 становится самой точкой остановки), то $S \to d\,(2t)^2/(2t^2) = 2d$ — путь туда и обратно до x_1, как и должно быть.

Смысл такой: всё определяется тем, что траектория симметрична: время до остановки одинаково с временем от остановки до возврата, и достаточно знать два момента попадания в одну точку.

Ответ. $S = \dfrac{(x_1-x_0)\,(t_1+t_2)^2}{2\,t_1t_2}$.