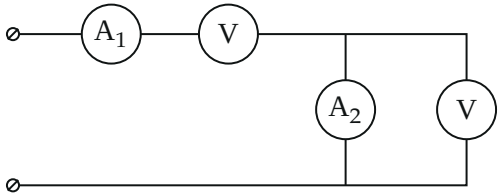
Цепь с амперметрами и вольтметрами

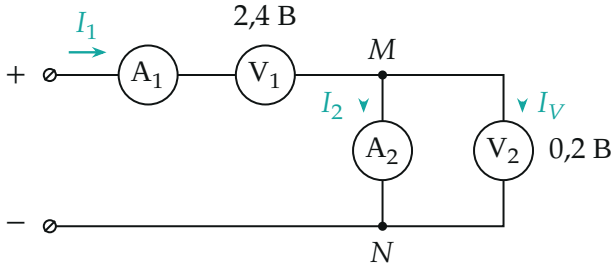
Задача 1. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 1] Собрана электрическая цепь, состоящая из идеального источника напряжения, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров (см. схему). Известны показания трёх приборов: первого амперметра ($I_1 = 1{,}5$ мА) и двух вольтметров ($U_1 = 0{,}2$ В, $U_2 = 2{,}4$ В). Найти показания второго амперметра и напряжение источника.

1. Найти показания второго амперметра.
2. Найти напряжение источника.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на цепь с неидеальными приборами: амперметр и вольтметр — просто резисторы, которые показывают ток через себя и напряжение на себе. Первый амперметр и первый вольтметр (на верхнем проводе) стоят последовательно, ток через них одинаков. Второй амперметр и второй вольтметр стоят параллельно и делят этот ток. Главная идея — сначала понять, какой вольтметр что показывает, сравнив токи через них, а затем по законам Ома и Кирхгофа найти сопротивления приборов.

Обозначения. r_A — сопротивление каждого амперметра, r_V — каждого вольтметра; V_1 — вольтметр на верхнем проводе (последовательно с A_1), V_2 — вольтметр, параллельный A_2; I_V — ток через V_2; I_2 — показание A_2; U_0 — напряжение источника; M и N — узлы, между которыми стоят A_2 и V_2.



Токи в цепи (бирюза): I_1 через A_1 и V_1 делится в узле M на I_2 и I_V

1. Какой вольтметр что показывает. Через V_1 течёт весь ток I_1, а через V_2 — только часть его, $I_V < I_1$. Сопротивления вольтметров одинаковы, поэтому по закону Ома напряжение на V_2 меньше, чем на V_1. Значит, V_1 показывает $U_2 = 2{,}4$ В, а V_2 — $U_1 = 0{,}2$ В.

2. Сопротивление вольтметра. Закон Ома для V_1: через него течёт ток I_1, а показывает он напряжение на себе:

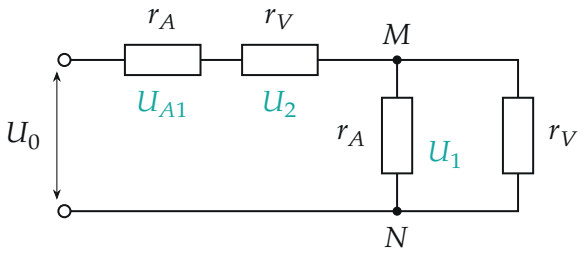
$$r_V = \frac{U_2}{I_1} = \frac{2{,}4\ \text{В}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{А}} = 1600\ \text{Ом}.$$

3. Показание второго амперметра. Закон Ома для V_2 даёт ток через него:

$$I_V = \frac{U_1}{r_V} = \frac{U_1}{U_2} I_1.$$

Первое правило Кирхгофа (сохранение заряда) для узла M: ток I_1 делится на I_2 и I_V, поэтому

$$I_2 = I_1 - I_V = \frac{U_2 - U_1}{U_2} I_1 = \frac{2{,}2}{2{,}4} \cdot 1{,}5\ \text{мА} = 1{,}375\ \text{мА}.$$



Эквивалентная схема: приборы — резисторы r_A и r_V; напряжения на участках (бирюза)

4. Сопротивление амперметра. A_2 и V_2 подключены к одним и тем же узлам M и N, напряжение на них одно и то же — U_1. Закон Ома для A_2:

$$r_A = \frac{U_1}{I_2} = \frac{U_1 U_2}{(U_2 - U_1) I_1} = \frac{0{,}2\ \text{В}}{1{,}375 \cdot 10^{-3}\ \text{А}} \approx 145{,}5\ \text{Ом}.$$

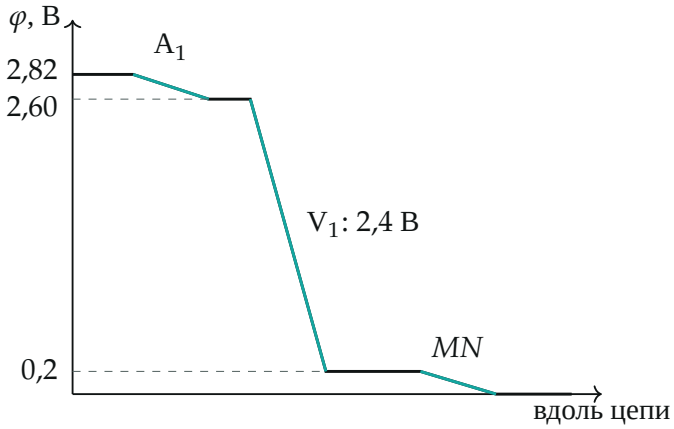
Вольтметр здесь всего в $r_V / r_A = 11$ раз «лучше» амперметра — поэтому приборы так заметно влияют на цепь.

5. Напряжение источника. Обходим цепь от «+» к «−» по верхнему проводу: A_1, V_1, участок MN. Второе правило Кирхгофа (напряжение источника равно сумме напряжений на последовательных участках):

$$U_0 = U_{A1} + U_2 + U_1, \qquad U_{A1} = I_1 r_A = \frac{U_1 U_2}{U_2 - U_1}.$$

Получаем

$$U_0 = \frac{U_1 U_2}{U_2 - U_1} + U_1 + U_2 = \frac{0{,}2 \cdot 2{,}4}{2{,}2} + 0{,}2 + 2{,}4 \approx 0{,}218 + 2{,}6 \approx 2{,}82\ \text{В}.$$



Потенциал вдоль верхнего провода (потенциал «−» равен нулю): падения на A_1 (0,218 В), V_1 (2,4 В) и на участке MN (0,2 В) в сумме дают U_0

Обратите внимание: напряжение источника — не просто $U_1 + U_2 = 2{,}6$ В. На первом амперметре тоже падает напряжение $I_1 r_A \approx 0{,}22$ В, его нельзя забыть, раз приборы неидеальны.

Ответ. 1) $I_2 = \dfrac{U_2 - U_1}{U_2} I_1 = 1{,}375$ мА; 2) $U_0 = \dfrac{U_1 U_2}{U_2 - U_1} + U_1 + U_2 \approx 2{,}82$ В.

Проверка. Размерности: ток — в мА, напряжение — в вольтах. Второй способ для U_0: полное сопротивление цепи $R = r_A + r_V + \dfrac{r_A r_V}{r_A + r_V} = 145{,}5 + 1600 + 133{,}3 \approx 1878{,}8$ Ом, и $U_0 = I_1 R \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1878{,}8 \approx 2{,}82$ В — то же. Предел: при идеальных приборах ($r_A \to 0$) через V_2 ничего не течёт, $I_2 \to I_1$ и $U_0 \to U_2$, как и ожидается.

Ответ. 1) $I_2 = \dfrac{U_2 - U_1}{U_2} I_1 = 1{,}375$ мА; 2) $U_0 = \dfrac{U_1 U_2}{U_2 - U_1} + U_1 + U_2 \approx 2{,}82$ В.