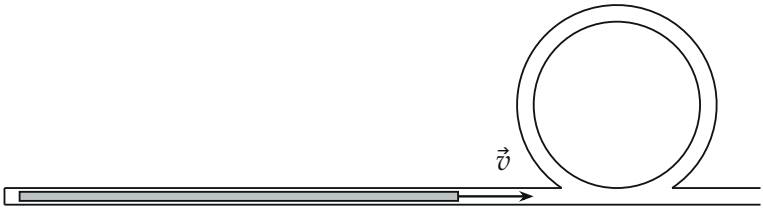
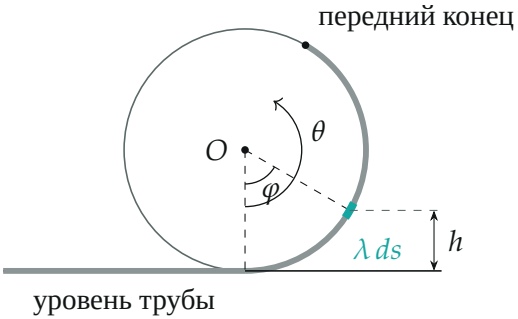
Канат и петля в трубе

Задача 2. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 2] Горизонтальную гладкую трубу изогнули, сделав в ней кольцевую петлю радиуса R, расположенную в вертикальной плоскости. В трубу на её горизонтальном участке со скоростью v пустили канат длиной $7R$ (см. рис.). При какой минимальной скорости v канат сможет преодолеть петлю? Трение отсутствует, радиус петли много больше радиуса самой трубы и каната.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Канат въезжает в петлю и поднимается по ней: его кинетическая энергия переходит в потенциальную. Труба гладкая, её сила реакции перпендикулярна движению и работы не совершает, канат нерастяжим — все его точки движутся с одной и той же по модулю скоростью. Значит, это задача на закон сохранения механической энергии каната, и вопрос сводится к тому, когда потенциальная энергия каната максимальна. Канат пройдёт петлю, если в этот момент он ещё движется.

Обозначения. m — масса каната, $\lambda = m/(7R)$ — масса единицы длины; s — длина части каната, вошедшей в петлю; $\theta = s/R$ — соответствующий центральный угол петли, отсчитанный от нижней точки; $U(s)$ — потенциальная энергия каната (нуль — на уровне горизонтальной трубы); u — скорость каната в произвольный момент, v — начальная.



Канат (серый) вошёл в петлю на угол θ; элемент $\lambda\,ds$ под углом φ к нижней точке поднят на $h = R(1-\cos\varphi)$

1. Энергия каната, частично вошедшего в петлю. Элемент каната длиной $ds = R\,d\varphi$ под углом φ от нижней точки находится на высоте $h = R(1-\cos\varphi)$. Сложим их энергии от входа ($\varphi = 0$) до переднего конца ($\varphi = \theta$):

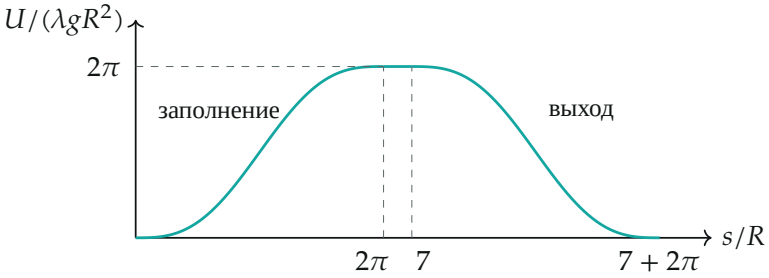
$$U = \int_0^{\theta} \lambda g\, R(1-\cos\varphi)\, R\,d\varphi = \lambda g R^2\,(\theta - \sin\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Производная $\lambda g R^2(1-\cos\theta) \ge 0$: пока петля заполняется, U только растёт — каждый новый кусок каната ложится выше нижней точки.

2. Петля заполнена. Длина петли $2\pi R \approx 6{,}28R < 7R$, поэтому к моменту полного заполнения задний конец ещё на горизонтальном участке. Дальше в петлю входит столько же каната, сколько выходит, и петля остаётся заполненной однородным кольцом. Центр масс кольца — в центре петли, на высоте R, поэтому

$$U_{\max} = m_1 g R, \qquad m_1 = \lambda \cdot 2\pi R = \frac{2\pi}{7}\,m.$$

Это совпадает с формулой пункта 1 при $\theta = 2\pi$: $\lambda g R^2 \cdot 2\pi$. Когда задний конец пройдёт вход, петля начнёт пустеть и U будет уменьшаться.



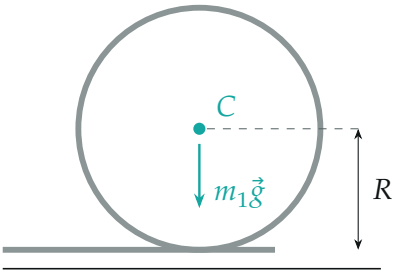
Потенциальная энергия каната в зависимости от длины s, прошедшей вход в петлю (вычислено по формуле пункта 1): максимум $2\pi\lambda g R^2$ — пока петля заполнена

3. Закон сохранения механической энергии каната от начала движения до произвольного момента (работа сил реакции гладкой трубы равна нулю, все точки нерастяжимого каната движутся с одной скоростью u):

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + U(s).$$

Скорость u меньше всего, когда U максимальна, — при заполненной петле. Канат преодолеет петлю, если там $u > 0$ (сколь угодно малая скорость). На границе $u = 0$:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2\pi}{7}\,mgR \quad \Rightarrow \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{4\pi gR}{7}} \approx 1{,}34\sqrt{gR}.$$



Петля заполнена: в ней кольцо каната массой $m_1 = \frac{2\pi}{7}m$, его центр масс C — в центре петли, на высоте R

Обратите внимание: опасный момент — не когда передний конец в верхней точке петли, а когда петля заполнена целиком. Пока она заполняется, энергия продолжает расти, и канат, «перевалив» верх передним концом, ещё может остановиться и скатиться назад.

Канат в трубе не может оторваться от стенки, как шарик в мёртвой петле, — труба держит его со всех сторон, поэтому условие «$u > 0$ при заполненной петле» единственное. При $u = 0$ ровно на заполненной петле канат остановился бы: однородное кольцо не тянет канат ни вперёд, ни назад, — поэтому нужна скорость хоть чуть больше $v_{\min}$.

Ответ. $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{4\pi gR}{7}} \approx 1{,}34\sqrt{gR}$ (канат проходит петлю при $v > v_{\min}$).

Проверка. Размерность: $\sqrt{gR}$ — м/с. Второй способ для $U_{\max}$ — интеграл пункта 1 при $\theta = 2\pi$ дал то же $2\pi\lambda gR^2$, что и центр масс кольца. Предел: если бы канат был очень длинным ($l \gg R$), доля массы в петле $2\pi R/l \to 0$ и $v_{\min} \to 0$ — длинный канат «втягивает» петлю почти без потери скорости. Смысл: разгонять надо до скорости, при которой кинетической энергии всего каната хватает поднять на высоту R лишь ту его часть, что умещается в петле.

Ответ. $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{4\pi gR}{7}} \approx 1{,}34\sqrt{gR}$.