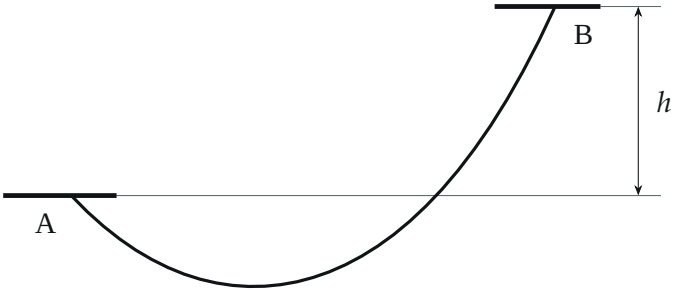
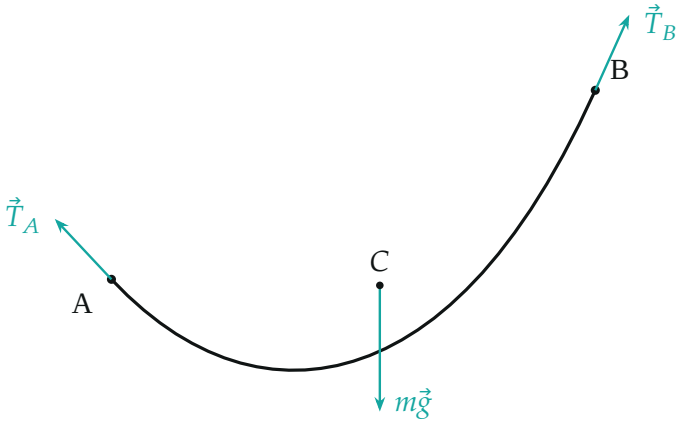
Верёвка на разной высоте

Задача 3. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Однородную нерастяжимую гибкую веревку массой m и длиной l подвесили в двух точках A и B, находящихся на разных высотах (см. рис.). Сила натяжения веревки в точке A известна и равна T_A. Найти силу натяжения веревки в точке B, которая находится на h выше точки A.



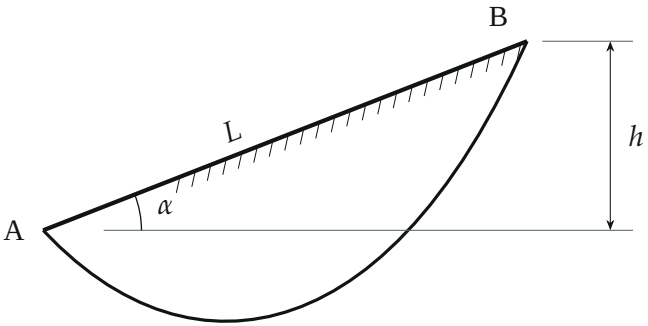
▲ **Решение. Что происходит.** Верёвка висит в равновесии, но форма её кривой (цепная линия) нам не нужна. Главная идея — мысленный приём организаторов: дополним верёвку так, чтобы новая система очевидно была в равновесии, и тогда разность натяжений $T_B - T_A$ уравновесит простой кусок верёвки на гладкой наклонной плоскости. Второй способ — условие равновесия малого элемента верёвки вдоль касательной: натяжение меняется только из-за веса и растёт ровно на $\lambda g\, dy$ при подъёме на dy.

Обозначения. $\lambda = m/l$ — масса единицы длины; T_A, T_B — силы натяжения в точках A и B (направлены по касательной к верёвке); L — длина отрезка AB, α — его угол с горизонтом, $\sin\alpha = h/L$; m_1 — масса куска верёвки длиной L.



Силы, действующие на висящую верёвку: натяжения в точках подвеса направлены по касательной к ней, вес приложен в центре масс C (вычислен по форме кривой)

1. Дополненная система. Соединим точки A и B гладкой наклонной плоскостью и положим на неё кусок такой же верёвки длиной $L = AB$, соединив его концы с висящей верёвкой в точках A и B. Получилась замкнутая верёвка. Она находится в равновесии: если бы она начала двигаться по своему контуру, то при перемещении каждый кусок сменялся бы таким же куском, конфигурация оставалась бы прежней, и энергия не менялась бы, — получился бы вечный двигатель.

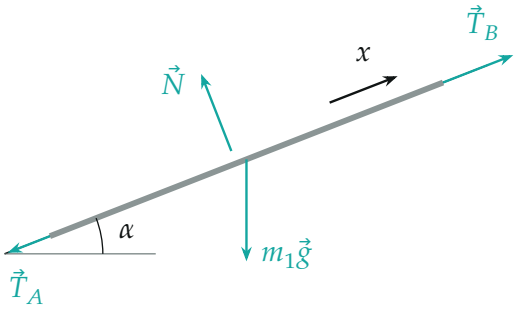


Дополненная система: верёвка замкнута куском длиной L, лежащим на гладкой наклонной плоскости AB

2. Висящая часть не изменилась. Закрепим замкнутую верёвку в точках A и B и уберём кусок на плоскости: висящая часть останется в равновесии в той же форме, а в точках A и B на неё будут действовать те же силы, что и до этого со стороны куска на плоскости. Значит, это и есть наша верёвка из условия, и натяжения в точках A и B у неё — T_A и T_B.

3. Равновесие куска на плоскости. На кусок длиной L действуют: сила тяжести $m_1\vec{g}$, нормальная реакция плоскости $\vec{N}$ (плоскость гладкая, трения нет) и силы натяжения на концах: в точке B — T_B вверх вдоль плоскости, в точке A — T_A вниз вдоль плоскости (гибкая верёвка огибает угол без трения, натяжение при этом сохраняется). Ось x направим вдоль плоскости вверх — тогда $\vec{N}$ в уравнение не войдёт. Первый закон Ньютона для куска в проекции на ось x:

$$T_B - T_A - m_1 g \sin\alpha = 0.$$



Силы, действующие на кусок верёвки на плоскости; ось x — вдоль плоскости, $\vec{N}$ на неё не проецируется

4. Ответ из геометрии. Верёвка однородна, поэтому $m_1 = \lambda L = \dfrac{L}{l}\,m$; из треугольника $\sin\alpha = \dfrac{h}{L}$. Подставляем:

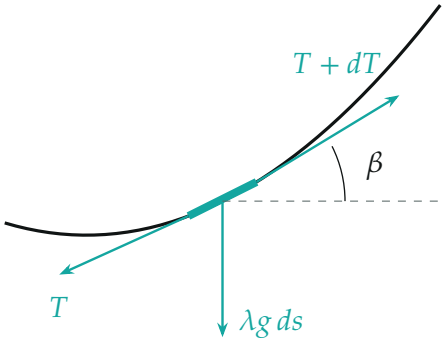
$$T_B = T_A + \frac{L}{l}\,m\,g\,\frac{h}{L} = T_A + \frac{mgh}{l}.$$

Длина L сократилась: результат не зависит ни от расстояния между точками, ни от формы кривой.

5. Второй способ: малый элемент верёвки. Возьмём кусок верёвки длиной ds, касательная к которому наклонена к горизонту под углом β. На него действуют натяжения T и $T + dT$ по касательной в разные стороны и вес $\lambda g\, ds$. Других сил нет: гибкая верёвка передаёт только силу натяжения вдоль себя. Первый закон Ньютона в проекции на касательную (направленную вверх по верёвке):

$$(T + dT) - T - \lambda g\, ds \sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad dT = \lambda g\, ds \sin\beta = \lambda g\, dy,$$

где $dy = ds \sin\beta$ — подъём элемента. Отличие направлений T и $T + dT$ на угол $d\beta$ даёт в проекции на касательную поправку второго порядка малости. Просуммируем от A до B: $T_B - T_A = \lambda g\,(y_B - y_A) = \dfrac{m}{l}\, gh$ — то же.



Малый элемент ds (бирюза): вдоль касательной натяжение меняется на $dT = \lambda g\, dy$

Обратите внимание: ответ не зависит ни от формы кривой, ни от того, где её нижняя точка. Натяжение гибкой однородной верёвки в равновесии определяется только высотой: $T = \lambda g\, y + \text{const}$. Поэтому и в задачах с гладкими блоками и желобами разность натяжений концов — это вес куска верёвки длиной в разность высот.

Ответ. $T_B = T_A + \dfrac{mgh}{l}$.

Проверка. Размерность: mgh/l — в ньютонах. Предел: при $h = 0$ (точки на одной высоте) $T_B = T_A$, как и требует симметрия. Знак: верхняя точка натянута сильнее, разность равна весу куска верёвки длиной h, — это видно и в пределе вертикально висящей верёвки, где натяжение растёт снизу вверх как раз на λg на единицу высоты.

Ответ. $T_B = T_A + \dfrac{mgh}{l}$.