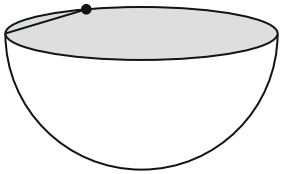
Тело на нити в полусферической чаше

Задача 4. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 4] На краю полусферической чаши радиуса R закреплена невесомая нить длиной $R/2$, ко второму концу которой прикреплено маленькое тело. Тело удерживают на краю чаши так, что нить натянута (см. рис.). В некоторый момент времени тело отпускают. Найти скорость и ускорение тела в тот момент, когда оно проходит нижнюю точку своей траектории.

1. Найти скорость тела в нижней точке траектории.
2. Найти ускорение тела в нижней точке траектории.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело скользит по гладкой сферической поверхности чаши, а натянутая нить не даёт ему уйти от точки закрепления дальше, чем на $R/2$. Главная идея — геометрическая: все точки траектории лежат одновременно на сфере радиуса R и на сфере радиуса $R/2$ с центром в точке закрепления нити. Пересечение двух сфер — окружность, а значит, тело движется по окружности в вертикальной плоскости. Дальше — закон сохранения энергии для скорости и кинематика движения по окружности для ускорения.

Обозначения. O — центр сферы (центр края чаши), A — точка закрепления нити на краю, P — нижняя точка траектории, C — центр окружности, по которой движется тело, r — её радиус. Оси: начало в O, ось x — горизонтально к точке A, ось y — горизонтально вдоль края, ось z — вертикально вверх. Тогда $A = (R, 0, 0)$.

1. Траектория — окружность. Тело всё время на поверхности чаши и на расстоянии $R/2$ от A (нить натянута — это видно в конце, где сила натяжения получится положительной):

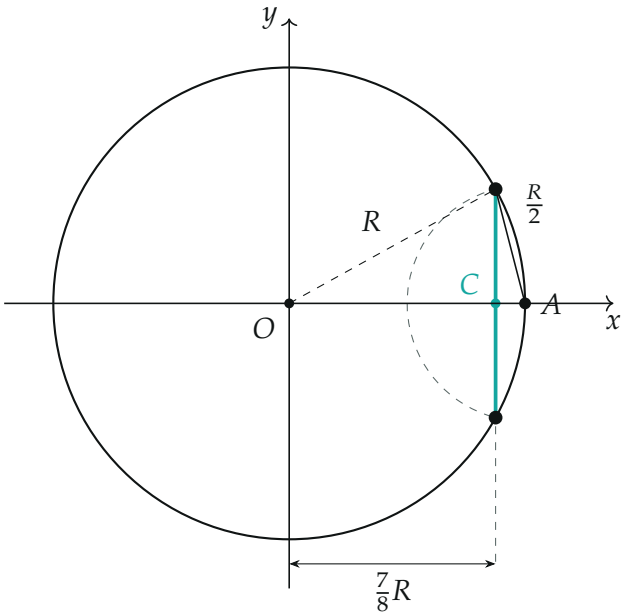
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad (x - R)^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Вычтем второе равенство из первого: $2xR - R^2 = \frac{3}{4}R^2$, откуда

$$x = \frac{7}{8}R.$$

Координата x тела постоянна — оно движется в вертикальной плоскости $x = \frac{7}{8}R$, перпендикулярной OA. Сечение сферы этой плоскостью — окружность с центром $C = (\frac{7}{8}R, 0, 0)$ на уровне края чаши и радиусом

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{7}{8}R\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}R \approx 0{,}484R.$$

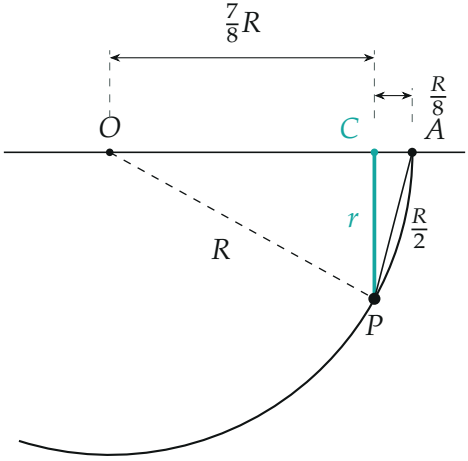


Вид сверху: край чаши (окружность радиуса R), точки на расстоянии $R/2$ от A (штрих) и проекция траектории — отрезок $x = \frac{7}{8}R$ (бирюза), концы которого — точки на краю, где тело можно удерживать

2. Где нижняя точка. Центр C окружности лежит на уровне края чаши, поэтому нижняя точка траектории P на r ниже края, а тело отпуска-

ют на уровне края ($z = 0$). Значит, тело опускается на высоту

$$H = r = \frac{\sqrt{15}}{8}R.$$



Вертикальное сечение через O и A: треугольник OCP ($OP = R$, $OC = \frac{7}{8}R$) даёт r; треугольник ACP — проверка: $\sqrt{(R/8)^2 + r^2} = R/2$

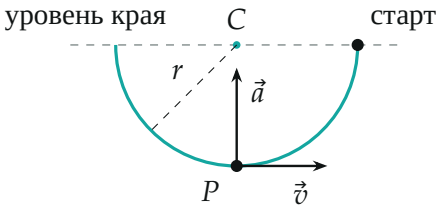
3. Скорость в нижней точке. Поверхность чаши гладкая: сила реакции перпендикулярна поверхности, а значит и скорости, и работы не совершает; сила натяжения нерастяжимой нити тоже перпендикулярна скорости (тело движется по сфере вокруг A). Работу совершает только сила тяжести, поэтому запишем закон сохранения механической энергии тела от момента отпускания (скорость нулевая) до нижней точки:

$$\frac{mv^2}{2} = mgr \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gr} = \sqrt{\frac{\sqrt{15}}{4}gR} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{15}\,gR} \approx 0{,}98\sqrt{gR}.$$

4. Ускорение в нижней точке. Тело движется по окружности радиуса r с центром C. Ускорение раскладываем на касательное и нормальное. В нижней точке скорость горизонтальна; касательное ускорение —

проекция результирующей силы на направление скорости. Сила тяжести вертикальна, сила реакции и натяжение нити лежат в вертикальной плоскости OAP, перпендикулярной скорости (скорость в P направлена по оси y). Значит, касательное ускорение равно нулю, и полное ускорение — нормальное, к центру C, вертикально вверх:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{2gr}{r} = 2g.$$



Плоскость траектории $x = \frac{7}{8}R$: тело идёт по дуге окружности радиуса r (бирюза); в нижней точке P скорость горизонтальна, ускорение направлено к C

5. Проверка: тело действительно прижато к чаше и нить натянута. Запишем второй закон Ньютона для тела в точке P в плоскости OAP (рисунок ниже): $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$, где $\vec{N}$ направлена к O, $\vec{T}$ — к A. Направляющие: от P к O — $\left(-\frac{7}{8},\ \frac{r}{R}\right)$, от P к A — $\left(\frac{1}{4},\ \frac{2r}{R}\right)$ (единичные векторы в проекциях на x и z). Проекции на оси x и z:

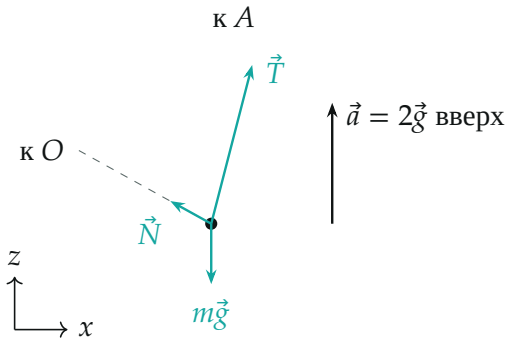
$$0 = -\frac{7}{8}N + \frac{1}{4}T, \qquad m \cdot 2g = -mg + \frac{r}{R}N + \frac{2r}{R}T.$$

Отсюда $T = \frac{7}{2}N$ и $\frac{r}{R} \cdot 8N = 3mg$:

$$N = \frac{3mg}{\sqrt{15}} \approx 0{,}77\,mg > 0, \qquad T = \frac{7}{2}N \approx 2{,}71\,mg > 0.$$

Обе силы положительны — тело не отрывается от чаши и нить натянута, траектория найдена верно. Численный расчёт вдоль всей дуги от края

до низа даёт N и T, монотонно растущие от нуля, — условие выполнено на всём пути.



Тело m в нижней точке (плоскость OAP): силы в масштабе вычисленных mg, $N \approx 0{,}77mg$, $T \approx 2{,}71mg$; их сумма — $2mg$ вверх

Обратите внимание: центр окружности траектории — точка C, а не точка закрепления A и не центр чаши O. Ускорение считается по радиусу r этой окружности, а не по длине нити $R/2$ и не по радиусу чаши R.

Ответ. 1) $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{15}\,gR} \approx 0{,}98\sqrt{gR}$; 2) $a = 2g$, направлено вертикально вверх.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gR}$ — м/с, a — в единицах g. Ускорение $2g$ не зависит от R: для любого спуска из состояния покоя на уровне центра окружности до её нижней точки $v^2/r = 2g$ — как у математического маятника, отпущенного из горизонтального положения. Второй способ для ускорения — сумма сил пункта 5: $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = 2m\vec{g}$ вверх, то же.

Ответ. 1) $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{15}\,gR} \approx 0{,}98\sqrt{gR}$; 2) $a = 2g$ (вертикально вверх).