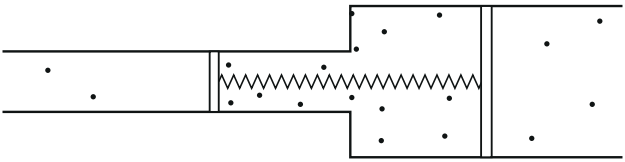
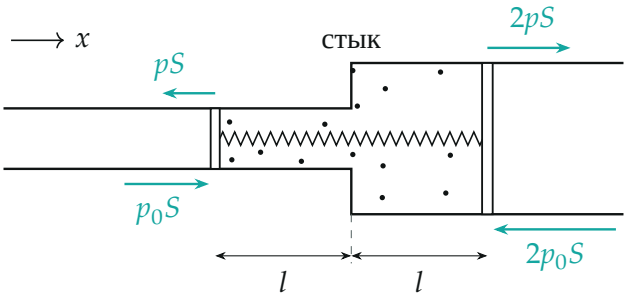
Два поршня в трубах и пружина

Задача 5. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Две трубы площадью сечения S и $2S$ состыкованы между собой и закрыты двумя теплонепроницаемыми поршнями, связанными пружиной с коэффициентом жёсткости k. Между поршнями находится идеальный газ с температурой T, трубы открыты в атмосферу. В равновесии поршни находятся на одинаковых расстояниях l от стыка. В некоторый момент времени температуру газа между поршнями медленно уменьшают до температуры $T/3$. На сколько сжатой или растянутой окажется после этого пружина по сравнению с недеформированным состоянием? Атмосферное давление p_0 известно.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на газ под поршнями со сменой режима. Пока оба поршня свободны, их равновесие задаёт давление газа — оно равно атмосферному, и газ охлаждается изобарно; поршни вместе с пружиной съезжают в сторону узкой трубы. Когда большой поршень упрётся в стык, режим меняется: давление газа падает, атмосфера вдавливает малый поршень, и пружина сжимается. Поэтому решаем по этапам: сначала находим, при какой температуре большой поршень дойдёт до стыка, потом — равновесие малого поршня и уравнение состояния газа.

Обозначения. Ось x — вдоль труб вправо, от узкой к широкой; p — давление газа; T_1 — температура, при которой большой поршень доходит до стыка; Δx — смещение малого поршня к стыку после этого (оно же сжатие пружины, так как большой поршень стоит); p_1 — давление газа при температуре $T/3$. Трение поршней о стенки не учитываем (о нём в условии ничего не сказано).



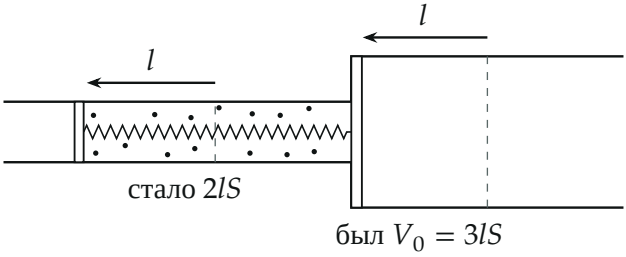
Начальное состояние: силы давления на поршни (бирюза); силы упругости пружины пока неизвестны

1. Начальное состояние. Рассмотрим систему «два поршня + пружина». Силы упругости пружины — внутренние для неё и сокращаются. Первый закон Ньютона для системы в проекции на ось x:

$$-pS + p_0S + 2pS - 2p_0S = 0 \quad \Rightarrow \quad (p - p_0)S = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0.$$

Теперь первый закон Ньютона для одного малого поршня: давления на него с двух сторон равны, значит, пружина на него не действует — она не деформирована. Её длина в недеформированном состоянии — $2l$.

2. Первый этап: изобарное охлаждение. Пока большой поршень не дошёл до стыка, рассуждение пункта 1 верно при любой температуре: $p = p_0$, пружина не деформирована, расстояние между поршнями $2l$ не меняется. Поршни смещаются вместе. Если оба сдвинуть влево на s, объём газа меняется на $+sS - 2sS = -sS$ — уменьшается, как и нужно при охлаждении. Значит, поршни едут влево, к узкой трубе, и большой поршень дойдёт до стыка, сдвинувшись на l. Объём при этом: был $V_0 = lS + l \cdot 2S = 3lS$, стал $2lS$.



Конец первого этапа: поршни сдвинулись влево на l, большой поршень дошёл до стыка; пружина по-прежнему не деформирована

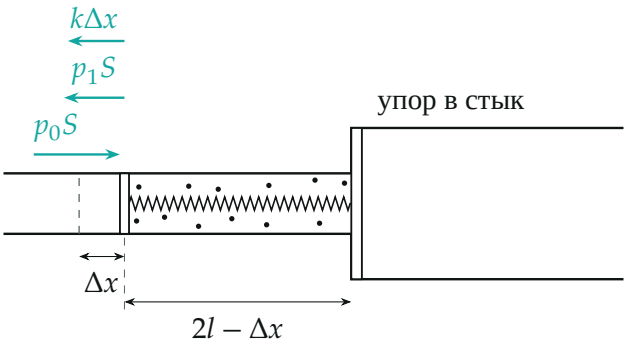
Закон Гей-Люссака (процесс изобарный, количество газа постоянно):

$$\frac{3lS}{T} = \frac{2lS}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2}{3}T.$$

Конечная температура $T/3 < \frac{2}{3}T$ — значит, будет и второй этап.

3. Второй этап: большой поршень упёрся. При дальнейшем охлаждении давление опускается ниже p_0, и атмосфера давит на большой поршень влево сильнее, чем газ вправо, — он прижат к стыку. Малый поршень атмосфера толкает вправо, к стыку, и он сжимает пружину. Первый закон Ньютона для малого поршня при температуре $T/3$ в проекции на ось x (атмосфера — вправо, газ — влево, сжатая пружина толкает поршень влево):

$$p_0 S - p_1 S - k\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_0 - \frac{k\Delta x}{S}.$$



Конец второго этапа ($T/3$): малый поршень сдвинулся к стыку на Δx и сжал пружину на Δx; силы на малом поршне (бирюза)

4. Уравнение состояния. Объединённый газовый закон между концом первого этапа (p_0, $2lS$, $\frac{2}{3}T$) и концом второго (p_1, $(2l - \Delta x)S$, $\frac{1}{3}T$):

$$\frac{p_0 \cdot 2lS}{2T/3} = \frac{p_1 (2l - \Delta x)S}{T/3} \quad \Rightarrow \quad p_1 (2l - \Delta x) = p_0 l.$$

Температура ушла: её конечное значение вдвое ниже, чем T_1, этого и хватает.

5. Сжатие пружины. Подставим p_1 из пункта 3 и умножим на S:

$$(p_0S - k\Delta x)\,(2l - \Delta x) = p_0Sl \quad \Rightarrow \quad k\,\Delta x^2 - (p_0S + 2kl)\,\Delta x + p_0Sl = 0.$$

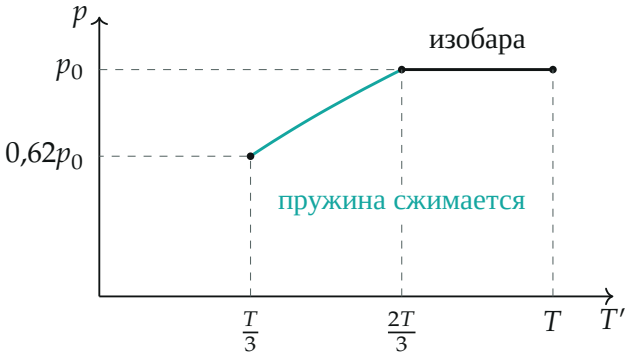
Дискриминант $(p_0S + 2kl)^2 - 4k\,p_0Sl = p_0^2S^2 + 4k^2l^2$, корни

$$\Delta x = \frac{p_0S + 2kl \mp \sqrt{p_0^2S^2 + 4k^2l^2}}{2k},$$

Больший корень не годится. Подставим в левую часть квадратного уравнения $\Delta x = 2l$: получим $4kl^2 - 2l(p_0S + 2kl) + p_0Sl = -p_0Sl < 0$, значит $2l$ лежит между корнями, и больший корень больше $2l$ — малый поршень ушёл бы за стык, а из $p_1(2l - \Delta x) = p_0l$ давление стало бы отрицательным. Остаётся

$$\Delta x = \frac{p_0S + 2kl - \sqrt{p_0^2S^2 + 4k^2l^2}}{2k} \qquad \text{(пружина сжата)}.$$

6. Большой поршень действительно прижат. Проверим допущение пункта 3. Силы на большой поршень вдоль x: атмосфера $-2p_0S$, газ $+2p_1S$, сжатая пружина толкает его вправо $+k\Delta x$. Сумма $-2(p_0 - p_1)S + k\Delta x = -2k\Delta x + k\Delta x = -k\Delta x < 0$ — результирующая направлена влево, в стык; стык отвечает силой реакции вправо, и поршень стоит.



Давление газа при медленном охлаждении от T до $T/3$ (вычислено для $kl = p_0S$): до $\frac{2}{3}T$ — изобара, затем давление падает, а пружина сжимается; при $kl = p_0S$ конечное сжатие $\Delta x \approx 0{,}38\,l$

Обратите внимание: пока свободны оба поршня, пружина вообще не деформируется, сколько ни охлаждай: равновесие системы поршней требует $p = p_0$. Сжатие появляется только после того, как большой поршень упрётся в стык, поэтому в газовый закон второго этапа входит состояние $(p_0,\, 2lS,\, \frac{2}{3}T)$, а не начальное.

Ответ. Пружина окажется сжатой на

$$\Delta x = \frac{p_0S + 2kl - \sqrt{p_0^2S^2 + 4k^2l^2}}{2k}.$$

Проверка. Размерность: p_0S и kl — силы, деление на k даёт длину. Пределы: при очень жёсткой пружине ($kl \gg p_0S$) $\sqrt{4k^2l^2 + p_0^2S^2} \approx 2kl + \dfrac{p_0^2S^2}{4kl}$ и $\Delta x \approx \dfrac{p_0S}{2k} \to 0$ — пружина почти не сжимается, но тогда $k\Delta x \approx p_0S/2$, $p_1 \approx p_0/2$ и объём почти $2lS$: по закону Шарля при вдвое меньшей температуре давление вдвое меньше — сходится. При очень мягкой пружине ($kl \ll p_0S$) $\Delta x \to l$: газ сжимается почти изобарно, $(2l - \Delta x)S = lS$ — объём вдвое меньше при вдвое меньшей температуре. Численно при $kl = p_0S$: $\Delta x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}l \approx 0{,}382l$, $p_1 = 0{,}618p_0$, и $p_1(2l - \Delta x) = 0{,}618 \cdot 1{,}618\,p_0l = p_0l$ — уравнение пункта 4 выполнено.

Ответ. Пружина сжата на $\Delta x = \dfrac{p_0S + 2kl - \sqrt{p_0^2S^2 + 4k^2l^2}}{2k}$.