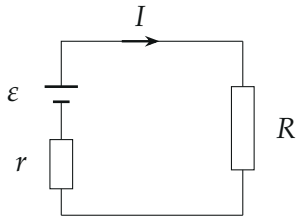
КПД источника и два резистора

Задача 1. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Когда к источнику электрической энергии подключили первый резистор, КПД источника составил $\eta_1 = 0{,}8$. Когда к тому же источнику подключили второй резистор, КПД источника составил $\eta_2 = (3/4)\,\eta_1$. Каким будет КПД источника, если к нему подключить оба резистора, соединённых параллельно? КПД источника электрической энергии называется отношение количества теплоты, выделяющейся во внешней цепи, к полному количеству теплоты, выделяющейся в цепи.



Поясняющий рисунок: источник с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r, резистор R

▲ **Решение. Что происходит.** Источник один и тот же, поэтому его ЭДС ε и внутреннее сопротивление r во всех трёх случаях одинаковы. Ток течёт и через внешнюю цепь, и через внутреннее сопротивление источника, значит, тепло делится между ними пропорционально сопротивлениям: КПД оказывается зависящим только от отношения R/r. Задача на КПД источника: сначала выражаем сопротивление каждого резистора в единицах r, потом складываем их проводимости при параллельном соединении. Качественно: чем больше внешнее сопротивление, тем меньшая доля тепла уходит на r и тем выше КПД; параллельное соединение даёт сопротивление меньше любого из двух, поэтому ответ должен получиться меньше η_2.

Обозначения. ε, r — ЭДС и внутреннее сопротивление источника; R_1, R_2 — сопротивления резисторов; R — сопротивление двух резисторов, соединённых параллельно; η — искомый КПД.

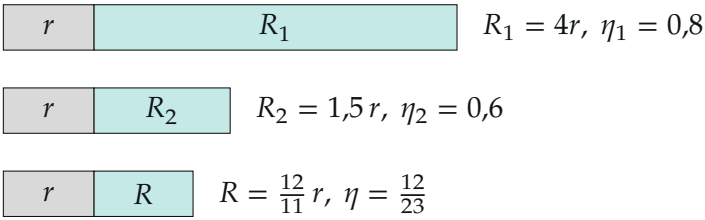
1. КПД через сопротивления. Закон Ома для замкнутой цепи с одним резистором R: $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$. За время t по закону Джоуля — Ленца во внешней цепи выделяется $Q_{\text{внеш}} = I^2Rt$, а во всей цепи — $Q = I^2(R+r)t$, потому что через r идёт тот же ток I. Поэтому

$$\eta = \frac{Q_{\text{внеш}}}{Q} = \frac{R}{R+r}.$$

ЭДС сократилась: она нам не нужна.

2. Сопротивления резисторов в единицах r. Из $\eta = \dfrac{R}{R+r}$ получаем $R = \dfrac{\eta r}{1-\eta}$. Для первого и второго резисторов ($\eta_2 = \frac{3}{4}\cdot 0{,}8 = 0{,}6$):

$$R_1 = \frac{0{,}8}{0{,}2}r = 4r, \qquad R_2 = \frac{0{,}6}{0{,}4}r = 1{,}5\,r.$$

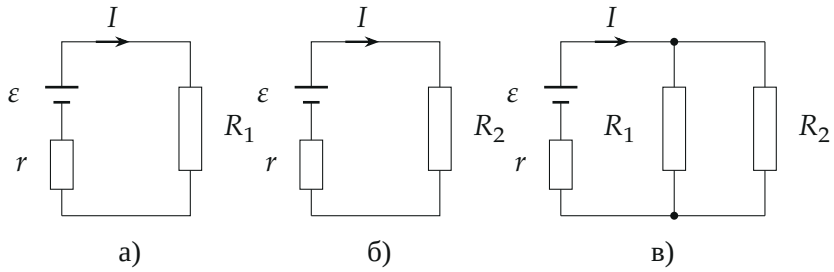


Внутреннее сопротивление r (серое) и внешнее сопротивление (бирюзовое) в одном масштабе: КПД — доля бирюзовой части во всей длине

3. Сопротивление двух резисторов, соединённых параллельно. Проводимости при параллельном соединении складываются: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, то есть

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{4\cdot 1{,}5}{4+1{,}5}r = \frac{12}{11}r \approx 1{,}09\,r.$$

Это меньше $R_2 = 1{,}5\,r$, как и должно быть для параллельного соединения (схема в).

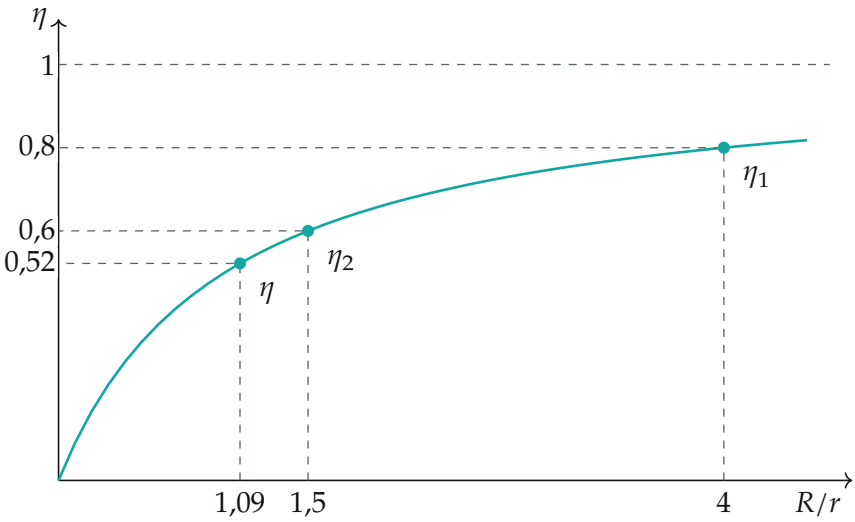


Три подключения одного и того же источника: к первому резистору, ко второму и к обоим сразу

4. КПД с двумя резисторами. Теперь внешнее сопротивление равно R, а внутреннее — по-прежнему r:

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{12/11}{12/11+1} = \frac{12}{23} \approx 0{,}52.$$

Результат сходится с качественной картиной: $0{,}52 < \eta_2 = 0{,}6 < \eta_1 = 0{,}8$ — резисторы в параллель дали меньшее сопротивление, а значит, и меньший КПД.



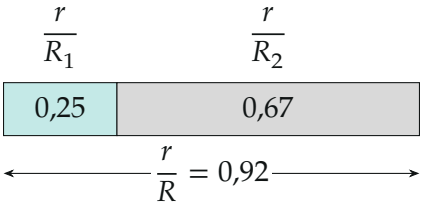
КПД источника как функция R/r: точки соответствуют первому резистору, второму и их параллельному соединению

Второй способ (через проводимости). Из $\eta = \dfrac{R}{R+r}$ следует $\dfrac{1}{\eta} - 1 = \dfrac{r}{R}$. Проводимости складываются, $\dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{R_1} + \dfrac{r}{R_2}$, поэтому

$$\frac{1}{\eta} - 1 = \left(\frac{1}{\eta_1} - 1\right) + \left(\frac{1}{\eta_2} - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} - 1 = 1{,}25 + \frac{5}{3} - 1 = \frac{23}{12}.$$

Отсюда $\eta = \dfrac{12}{23}$ — тот же результат без вычисления самих сопротивлений. В общем виде $\eta = \dfrac{\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}$, а при $\eta_2 = \frac{3}{4}\eta_1$

$$\eta = \frac{3\eta_1}{7 - 3\eta_1} = \frac{2{,}4}{4{,}6} \approx 0{,}52.$$



Проводимости, измеренные в единицах $1/r$, складываются

Проверка. Безразмерна, как и η. Предельные случаи общей формулы: $\eta_2 \to 1$ (второй резистор отключён, $R_2 \to \infty$) даёт $\eta \to \eta_1$; $\eta_2 \to 0$ (второй резистор закорачивает источник, $R_2 \to 0$) даёт $\eta \to 0$. Смысл результата: при том же источнике второй резистор в параллель увеличивает ток, и большая доля тепла остаётся внутри источника.

Ответ. $\eta = \dfrac{3\eta_1}{7 - 3\eta_1} = \dfrac{12}{23} \approx 0{,}52.$