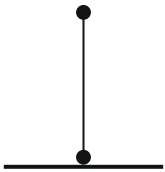
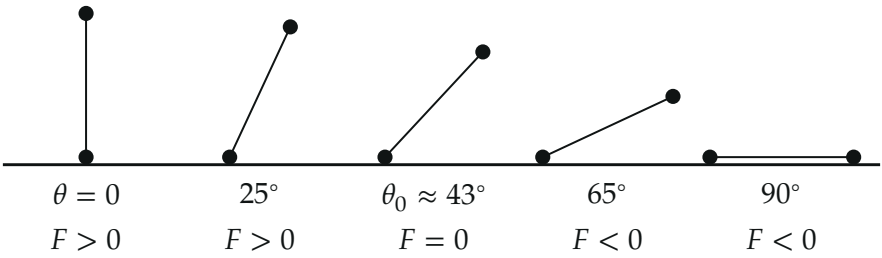
Стержень с шариками падает

Задача 2. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Два одинаковых маленьких массивных шарика прикреплены к жёсткому невесомому стержню длиной l. Стержень ставят вертикально на гладкую горизонтальную поверхность (см. рис.), а потом отпускают. Найти ускорение центра стержня в тот момент времени, когда скорость нижнего шарика будет максимальна.



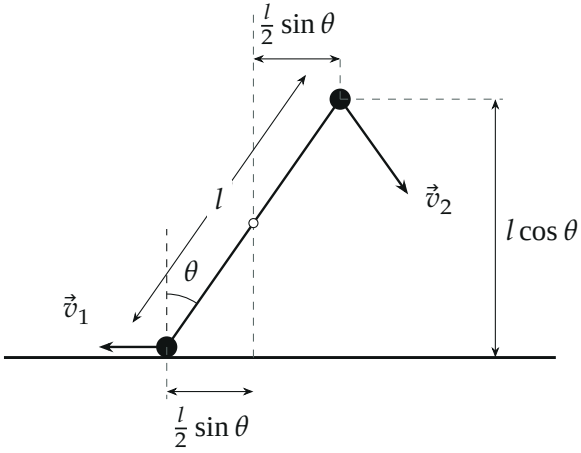
▲ **Решение.** **Что происходит.** Пол гладкий, горизонтальных сил на систему нет, поэтому середина стержня (она же центр масс двух одинаковых шариков) падает строго вертикально, а нижний шарик скользит по полу вбок. Он стартует из покоя и в конце, когда стержень ляжет, снова неподвижен, значит, в середине движения его скорость максимальна. Главная идея: в момент максимума скорости ускорение нижнего шарика равно нулю, а это возможно лишь при нулевой силе со стороны стержня; тогда верхний шарик — свободно падающее тело, и ускорение центра масс находится как среднее ускорений шариков. Задача на ускорение центра масс системы связанных тел.



Стержень в пяти положениях (F — сила стержня, положительная при сжатии): сначала он сжат и разгоняет нижний шарик, потом растянут и тормозит его

Обозначения. m — масса каждого шарика; индекс 1 — нижний шарик, 2 — верхний; C — середина стержня; θ — угол стержня с вертикалью; $\vec{F}$ — сила, с которой стержень действует на шарик (положительная, если стержень сжат); $\vec{N}$ — сила реакции пола. Ось x — вдоль пола, ось y — вертикально вверх.

1. Куда движется центр масс. Рассмотрим систему из двух шариков и стержня. Внешние силы — $m\vec{g}$ на каждый шарик и $\vec{N}$ — вертикальны (пол гладкий). Горизонтальная проекция суммы внешних сил равна нулю, а в начале система покоилась. Поэтому горизонтальная координата центра масс не меняется: он движется по вертикали. Шарики одинаковы, стержень невесом, значит центр масс — середина стержня C. Тогда нижний шарик смещается влево, а верхний вправо ровно настолько же: $x_1 = -\frac{l}{2}\sin\theta$, $x_2 = +\frac{l}{2}\sin\theta$, а высота верхнего шарика $y_2 = l\cos\theta$.



Произвольный момент: центр масс C остаётся на вертикали, шарики сдвинуты симметрично, $\vec{v}_1$ — скорость нижнего шарика, $\vec{v}_2$ — верхнего

2. Условие максимума скорости. Запишем второй закон Ньютона для нижнего шарика в проекции на ось x (схема «тело m» — на рисунке ниже): пол и сила тяжести вертикальны и горизонтальных проекций не дают, остаётся только сила стержня:

$$ma_{1x} = -F\sin\theta.$$

В момент максимума скорость v_1 не меняется, значит $a_{1x} = 0$. В середине движения $\sin\theta \neq 0$, поэтому $F = 0$: стержень в этот момент не сжат и не растянут. Вертикально нижний шарик остаётся на полу: $a_{1y} = 0$. Значит, $\vec{a}_1 = 0$.

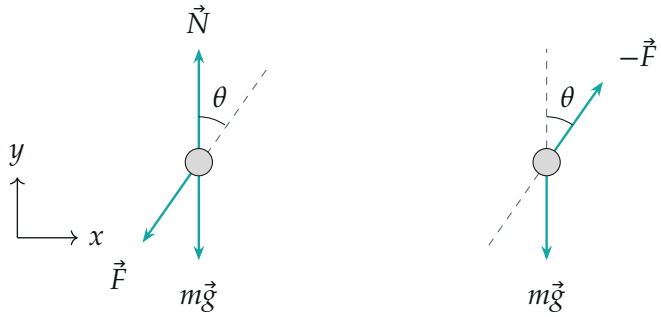


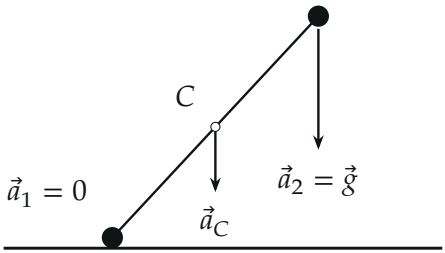
Схема «тело m»: силы на нижний и верхний шарики; стержень действует на шарики равными по модулю и противоположными силами вдоль себя

3. Верхний шарик в этот момент. Запишем второй закон Ньютона для верхнего шарика векторно: $m\vec{a}_2 = m\vec{g} + (-\vec{F})$. При $F = 0$ получаем $\vec{a}_2 = \vec{g}$: верхний шарик на мгновение падает свободно.

4. Ускорение центра стержня. Центр стержня — центр масс двух одинаковых шариков, поэтому его ускорение равно среднему ускорений шариков:

$$\vec{a}_C = \frac{m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2}{2m} = \frac{0 + \vec{g}}{2} = \frac{\vec{g}}{2}.$$

Ускорение центра стержня направлено вертикально вниз, оно вдвое меньше g.

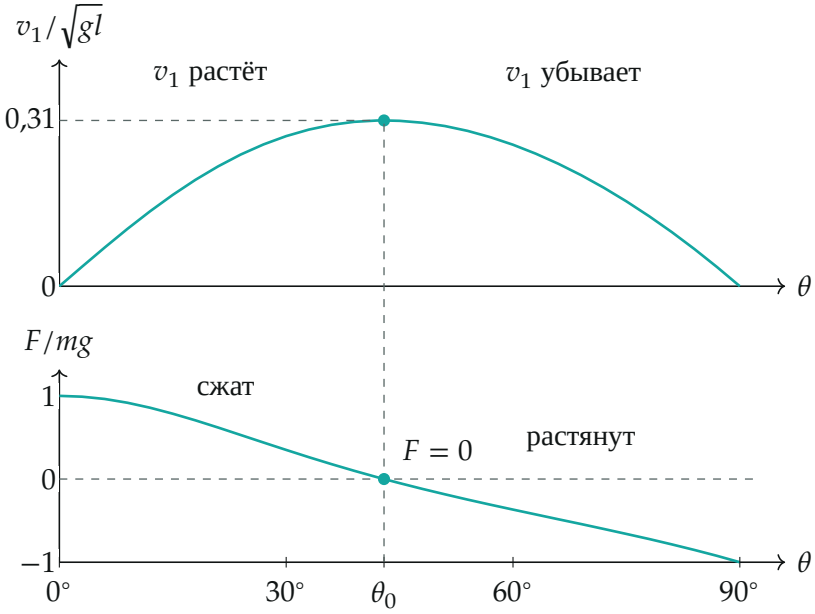


Положение θ_0 ($F = 0$): $\vec{a}_1 = 0$, $\vec{a}_2 = \vec{g}$, ускорение середины стержня — ровно посередине между ними

Второй способ: энергия. Найдём угол θ_0 из условия максимума скорости, не вспоминая о силах. Шарики приходят в движение из покоя; скорость нижнего $v_1 = \frac{l}{2}\dot\theta\cos\theta$, верхнего — горизонтальная $\frac{l}{2}\dot\theta\cos\theta$ и вертикальная $l\dot\theta\sin\theta$. Пол гладкий, механическая энергия сохраняется; обозначим $u = \cos\theta$:

$$mgl(1-u) = \frac{ml^2\dot\theta^2}{2}\left(1-\frac{u^2}{2}\right) \Rightarrow v_1^2 = \frac{gl}{2}\cdot\frac{u^2(1-u)}{1-u^2/2}.$$

Производная правой части по u равна $\dfrac{2u(u-2)(u^2+2u-2)}{(u^2-2)^2}$ и обращается в нуль при $u^2+2u-2=0$, то есть $\cos\theta_0 = \sqrt{3}-1 \approx 0{,}73$, $\theta_0 \approx 43°$, $v_{1\,\max} \approx 0{,}31\sqrt{gl}$.



Скорость нижнего шарика и сила стержня в зависимости от угла: нулевая сила — при том же θ_0, где скорость максимальна

Сила стержня при этом же угле тоже нулевая: из вертикального уравнения верхнего шарика $m\ddot{y}_2 = -mg + F\cos\theta$ и $y_2 = lu$, $\dot{u}^2 = \frac{2g}{l}\cdot\frac{(1-u)(1-u^2)}{1-u^2/2}$ получается

$$F = mg\,\frac{(2-u)(u^2+2u-2)}{(2-u^2)^2},$$

и $F = 0$ при том же $u^2 + 2u - 2 = 0$. Значит, максимум скорости и нулевая сила — одно и то же положение, что и требовалось. Ускорение центра масс из уравнения для системы: $2ma_{Cy} = N - 2mg$, а у нижнего шарика $N = mg$ (при $F = 0$ вертикальных сил на него больше нет), откуда $a_{Cy} = -g/2$ — тот же результат.

Обратите внимание. Нижний шарик остаётся на полу. Вертикальное уравнение системы $2ma_{Cy} = N - 2mg$ с $a_{Cy} = \ddot{y}_2/2$ даёт $N = mg\,(2+h'(u))$, где $h(u) = \frac{(1-u)(1-u^2)}{1-u^2/2}$ и $\dot{u}^2 = \frac{2g}{l}h(u)$; $h'(u) \geq -1{,}2$, поэтому $N \geq 0{,}8\,mg > 0$ и допущение $a_{1y} = 0$ верно.

Проверка. Размерность: $[a] = g$. Предельный случай: при совсем маленьком θ стержень почти вертикален и сжат ($F \approx mg$), в положении лёжа ($\theta = 90°$) растянут ($F = -mg$) — где-то посередине сила обязана обратиться в нуль и скорость нижнего шарика пройти максимум. Физический смысл: в этот момент нижний шарик движется по инерции, стержень не передаёт ему силы, а верхний падает свободно.

Ответ. $a_C = \frac{g}{2}$, направлено вертикально вниз.