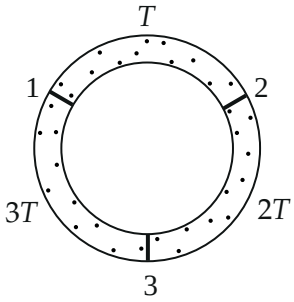
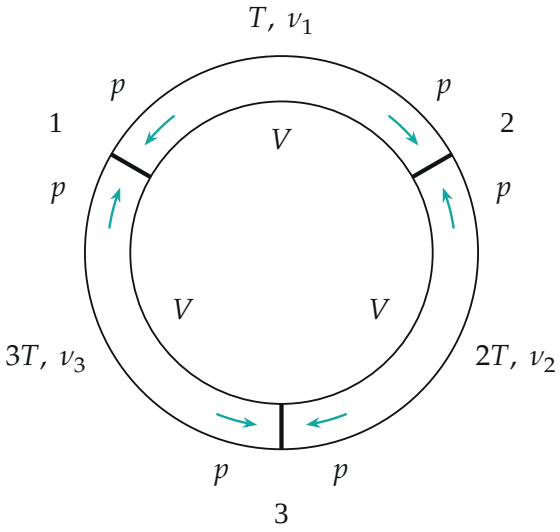
Тор с тремя поршнями

Задача 3. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Имеется закрытый сосуд в форме тора — замкнутой кольцевой цилиндрической трубки. Сосуд разделили на три отсека тремя подвижными поршнями 1, 2 и 3 и расположили на горизонтальном столе (см. рис.; вид сверху). В сосуде содержатся ν молей одноатомного идеального газа (в сумме во всех отсеках). В начальном состоянии объёмы отсеков сосуда одинаковы, температуры газа равны T, $2T$ и $3T$ (показаны на рисунке), а поршни находятся в равновесии. Считая, что поршень 1 тепло не проводит, найти, сколько тепла пройдёт через поршни 2 и 3 при установлении теплового равновесия. Потерями тепла в окружающее пространство пренебречь.



1. Сколько тепла пройдёт через поршень 2?
2. Сколько тепла пройдёт через поршень 3?

▲ **Решение. Что происходит.** Поршни подвижны и невесомы, поэтому в каждый момент они в равновесии: давление газа по обе стороны любого поршня одинаково, а значит, одинаково во всех трёх отсеках. Газы обмениваются теплом через поршни 2 и 3 (поршень 1 тепла не проводит), температуры выравниваются. Главная идея: полная внутренняя энергия газов выражается через давление и суммарный объём, $U = \frac{3}{2} p \cdot 3V$; энергия не уходит, объём сосуда не меняется, значит давление остаётся прежним в течение всего процесса, и каждый газ нагревается или охлаждается *изобарически*. Тогда теплота, полученная газом, равна $\frac{5}{3}$ изменения его внутренней энергии. Класс задачи: теплообмен газов при постоянном давлении.



Равновесие поршней: с обеих сторон каждого поршня давление p одно и то же, объёмы отсеков одинаковы

Обозначения. Отсек с газом при температуре T назовём первым, при $2T$ — вторым, при $3T$ — третьим (индексы 1, 2, 3 у ν, T, U); поршни нумеруем, как на рисунке. p — давление, V — начальный объём одного отсека, T_0 — конечная температура. Q_2 — теплота, прошедшая через поршень 2 в сторону первого отсека; Q_3 — теплота, прошедшая через поршень 3 из третьего отсека во второй.

1. Давление и количества вещества. Поршень в равновесии: слева и справа на него действуют силы pS с одинаковым давлением, поэтому давление в трёх отсеках одинаково. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для каждого отсека (объёмы одинаковы):

$$pV = \nu_1 RT = \nu_2 R \cdot 2T = \nu_3 R \cdot 3T \;\Rightarrow\; \nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} = 6 : 3 : 2.$$

Так как $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \nu$, получаем $\nu_1 = \dfrac{6}{11}\nu$, $\nu_2 = \dfrac{3}{11}\nu$, $\nu_3 = \dfrac{2}{11}\nu$.

2. Конечная температура. Тепло наружу не уходит, внешним телам газы работы не совершают (сосуд закрыт, суммарный объём не меняется), поэтому суммарная внутренняя энергия газов сохраняется. Для

одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$:

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT + \frac{3}{2}\nu_2 R\cdot 2T + \frac{3}{2}\nu_3 R\cdot 3T = \frac{3}{2}\nu R T_0,$$
$$T_0 = \frac{6\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3}{11}\,T = \frac{18}{11}\,T.$$

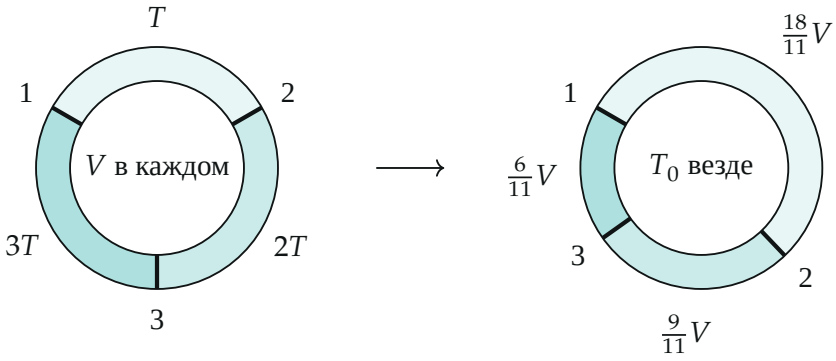
Вклад каждого отсека одинаков: $\nu_i T_i = \frac{6}{11}\nu T$.

3. Давление не меняется. В любой момент давление во всех отсеках одинаково (пункт 1), поэтому энергия газов выражается через это давление $p_{\text{тек}}$ и объём сосуда $3V$: $U = \frac{3}{2}p_{\text{тек}}V_1 + \frac{3}{2}p_{\text{тек}}V_2 + \frac{3}{2}p_{\text{тек}}V_3 = \frac{9}{2}p_{\text{тек}}V$. Энергия постоянна, значит $p_{\text{тек}} = p$ всё время: все процессы изобарические.

Тогда объёмы отсеков в конце известны: $V_i' = \nu_i R T_0/p$. Из пункта 1 $\nu_1 RT = pV$, $\nu_2 RT = \frac{1}{2}pV$, $\nu_3 RT = \frac{1}{3}pV$, поэтому

$$V_1' = \frac{18}{11}V, \qquad V_2' = \frac{9}{11}V, \qquad V_3' = \frac{6}{11}V.$$

Сумма $V_1' + V_2' + V_3' = 3V$: объём сосуда сохранился, и конечная температура найдена верно — второй способ получить T_0 из условия $\nu RT_0 = p\cdot 3V$ даёт то же $\frac{18}{11}T$.



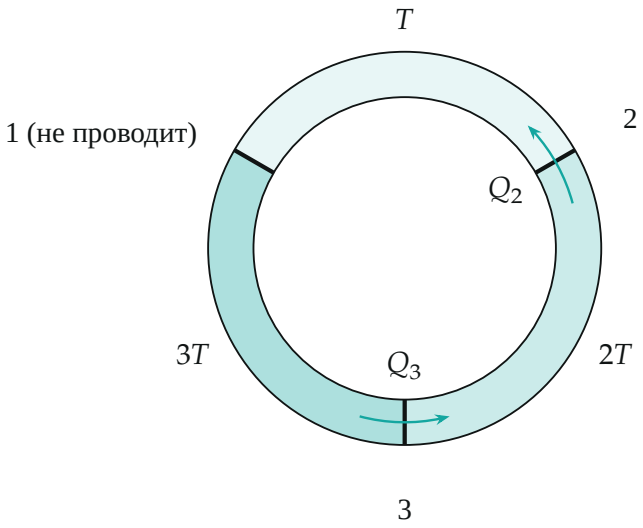
Было и стало: поршни сдвинулись, температура везде T_0 (оттенок — температура отсека до теплообмена)

Пункт 1.

4. Теплота, прошедшая через поршень 2. Первый отсек граничит с остальными только через поршень 2 (поршень 1 тепла не проводит), поэтому всё полученное им тепло прошло через поршень 2. Газ первого отсека нагревается изобарически от T до T_0. Первый закон термодинамики: $Q = \Delta U + p\Delta V$, а для изобарического процесса $p\Delta V = \nu R T_0 - \nu R T = \frac{2}{3}\Delta U$, откуда $Q = \frac{5}{3}\Delta U$:

$$Q_2 = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\nu_1 R\,(T_0 - T) = \frac{5}{2}\cdot\frac{6}{11}\nu R\cdot\frac{7}{11}T = \frac{105}{121}\nu RT \approx 0{,}87\,\nu RT.$$

Газ действительно получает теплоту, и она идёт из второго отсека через поршень 2 в первый.



Куда идёт тепло: от самого горячего отсека (3T) через поршень 3 во второй, оттуда через поршень 2 в первый; поршень 1 тепло не пропускает

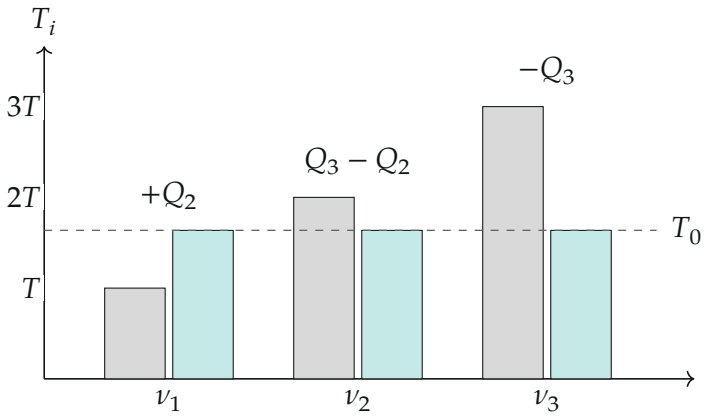
Пункт 2.

5. Теплота, прошедшая через поршень 3. Третий отсек граничит с остальными только через поршень 3, и он охлаждается изобарически от

$3T$ до T_0, отдавая теплоту $\frac{5}{3}|\Delta U_3|$ через поршень 3:

$$Q_3 = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\,\nu_3 R\,(3T - T_0) = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{11}\nu R\cdot\frac{15}{11}T = \frac{75}{121}\,\nu RT \approx 0{,}62\,\nu RT.$$

Газ отдаёт теплоту: внутренняя энергия третьего отсека уменьшилась, и тепло пошло через поршень 3 во второй отсек.



Температура отсеков до (серые столбцы) и после (бирюзовые) теплообмена; над столбцами — теплота, полученная отсеком

Проверка баланса по второму отсеку. Второй отсек получает Q_3 и отдаёт Q_2, значит, его теплота равна $Q_3 - Q_2$ и должна совпасть с $\frac{5}{3}\Delta U_2$. Выпишем изменения внутренней энергии $\Delta U_i = \frac{3}{2}\nu_i R(T_0 - T_i)$ и теплоты $\frac{5}{3}\Delta U_i$ в единицах νRT:

	отсек 1	отсек 2	отсек 3	сумма
ΔU_i	$\frac{63}{121}$	$-\frac{18}{121}$	$-\frac{45}{121}$	0
$\frac{5}{3}\Delta U_i$	$\frac{105}{121}$	$-\frac{30}{121}$	$-\frac{75}{121}$	0

Для второго отсека

$$Q_3 - Q_2 = \frac{75-105}{121}\,\nu RT = -\frac{30}{121}\,\nu RT = \tfrac{5}{3}\Delta U_2,$$

что совпало; суммарное изменение внутренней энергии и суммарная теплота равны нулю.

Обратите внимание. Теплоту нельзя искать как ΔU: газ ещё и совершает работу $p\,\Delta V$ (расширяясь, толкает поршни), и множитель $\frac{5}{3}$ появляется только потому, что процесс изобарический, а это мы доказали. Второй момент: Q_2 и Q_3 находятся по одному отсеку лишь потому, что первый и третий отсеки обмениваются теплом с одним соседом: у первого поршень 1 тепла не проводит, у третьего — тоже.

Проверка. Размерность: νRT — энергия. Предельный случай: при одинаковых температурах газов ($T_0 = T$) $Q_2 = Q_3 = 0$ — тепло не течёт. Те же числа через теплоёмкость $C_p = \frac{5}{2}R$:

$$Q_2 = \tfrac{5}{2}\nu_1 R \cdot \tfrac{7}{11}T = \tfrac{105}{121}\,\nu RT, \qquad Q_3 = \tfrac{5}{2}\nu_3 R \cdot \tfrac{15}{11}T = \tfrac{75}{121}\,\nu RT.$$

Смысл: газ второго отсека работает «транзитом» — принимает тепло от третьего и передаёт его первому, а сам остывает от $2T$ до $\frac{18}{11}T$.

Ответ. 1) $Q_2 = \dfrac{105}{121}\,\nu RT \approx 0{,}87\,\nu RT$ (через поршень 2 в первый отсек, где газ был при T); 2) $Q_3 = \dfrac{75}{121}\,\nu RT \approx 0{,}62\,\nu RT$ (через поршень 3 из третьего отсека, где газ был при $3T$, во второй отсек).