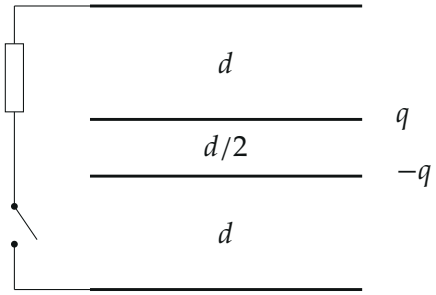
Четыре пластины и резистор

Задача 4. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Четыре одинаковых металлических пластинки расположены параллельно друг другу на расстояниях d, $d/2$ и d друг от друга. Две средние пластинки зарядили зарядами q и $-q$, крайние (незаряженные) пластинки соединили проводником через резистор и ключ (см. рис.). Какой заряд пройдёт через резистор к верхней пластинке на рисунке, и какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа в процессе установления равновесия? Площадь пластинок S. Размеры пластинок много больше расстояния между ними.



1. Какой заряд пройдёт через резистор к верхней пластинке?
2. Какое количество теплоты выделится на резисторе?

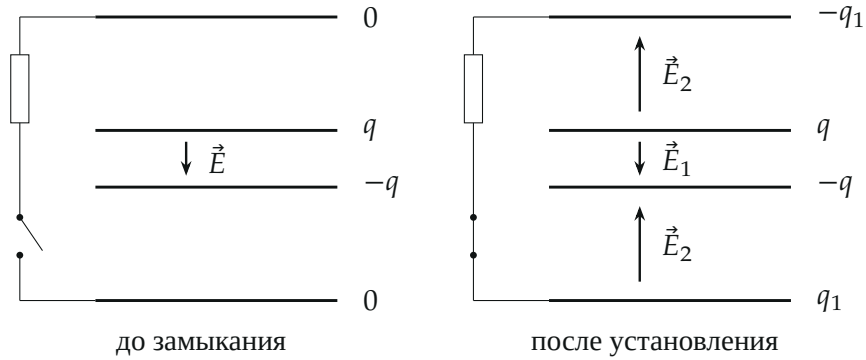
▲ **Решение.** **Что происходит.** До замыкания ключа внешние пластинки не заряжены, а поле есть только между средними. После замыкания заряд может перетекать между внешними пластинками через резистор, пока ток не прекратится, а он прекратится, когда разность потенциалов между внешними пластинками станет нулём: иначе поле продолжало бы гнать заряд. Из этого условия найдём заряды внешних пластинок, а теплоту — как убыль энергии электрического поля: всё, что поле потеряло, выделилось на резисторе. Класс задачи: конденсаторы — перераспределение зарядов и баланс энергии.

Обозначения. q_1 — заряд нижней внешней пластинки после установления равновесия, S — площадь пластинки, E_1 — поле в средней щели

(толщина $d/2$), E_2 — поле во внешних щелях (толщина d каждая), $W_н$ и $W_к$ — энергия поля до и после, Q — выделившаяся теплота.

Пункт 1.

1. Заряды внешних пластинок. Внешние пластинки соединены только друг с другом и вначале не заряжены, значит, их суммарный заряд остаётся нулевым. После замыкания верхняя пластинка получит заряд $-q_1$, нижняя — $+q_1$ (рис., справа).



Заряды пластинок и поля в щелях: слева до замыкания ключа, справа после установления равновесия (во внешних щелях поле направлено вверх, в средней — вниз)

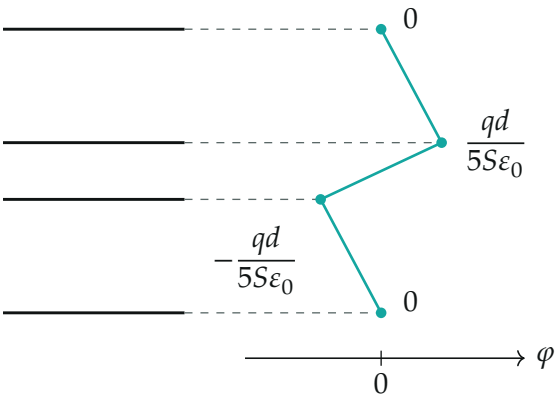
2. Поля в щелях. Пластинки велики по сравнению с расстояниями, поэтому поле каждой пластинки однородно и равно $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ по обе стороны от неё. По принципу суперпозиции поле в щели равно $\dfrac{1}{2S\varepsilon_0}$, умноженной на разность зарядов всех пластинок под щелью и над ней (поле направлено вверх, если снизу заряда больше). Во внешних щелях разность равна $q_1 - (-q_1)$, в средней — $(-q + q_1) - (q - q_1)$:

$$E_2 = \frac{q_1}{S\varepsilon_0}\ (\text{вверх}), \qquad E_1 = \frac{q - q_1}{S\varepsilon_0}\ (\text{вниз}).$$

3. Условие равновесия. Ток прекратится, когда внешние пластинки окажутся под одним потенциалом: работа поля по переносу пробного

заряда δq от одной внешней пластинки к другой равна нулю. Вдоль пути сверху вниз поле средней щели совершает положительную работу, а внешних — отрицательную (поле против пути):

$$\delta q\, E_1 \frac{d}{2} - \delta q\, E_2 \cdot 2d = 0 \;\Rightarrow\; (q - q_1)\frac{d}{2} = 2q_1 d \;\Rightarrow\; q_1 = \frac{q}{5}.$$



Потенциал как функция высоты после установления равновесия: потенциалы крайних пластинок равны (нулю), а между пластинками он меняется линейно

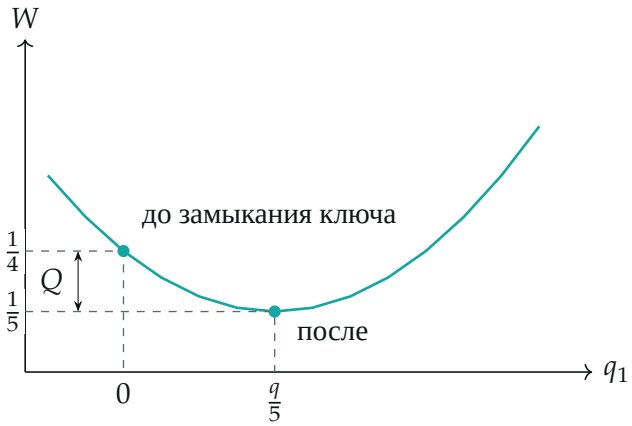
Заряд верхней пластинки $-q_1 = -\frac{q}{5}$: через резистор к верхней пластинке пройдёт заряд $-\frac{q}{5}$, то есть отрицательный заряд $q/5$ (верхняя пластинка рядом с положительно заряженной средней притягивает отрицательный заряд).

Второй способ: энергия поля. Энергия поля как функция q_1: объём щелей $S \cdot \frac{d}{2}$ с полем E_1 и $2 \cdot S \cdot d$ с полем E_2, энергия единицы объёма $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$:

$$W(q_1) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_1^2\, S\frac{d}{2} + 2E_2^2\, Sd\right) = \frac{d}{4S\varepsilon_0}[(q - q_1)^2 + 4q_1^2].$$

Заряд δq_1, прошедший через резистор под напряжением U между внешними пластинками, меняет энергию на $\delta W = U\,\delta q_1$, поэтому ток идёт,

пока $U \neq 0$, то есть до минимума энергии: $\dfrac{dW}{dq_1} = 0 \Rightarrow -2(q-q_1)+8q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \dfrac{q}{5}$ — то же значение.



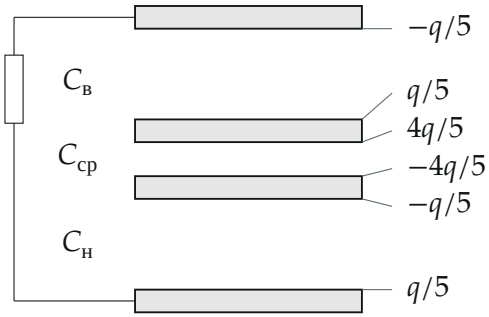
Энергия поля в зависимости от заряда q_1 внешней пластинки (в единицах $q^2d/(S\varepsilon_0)$): ток идёт, пока энергия не достигнет минимума; разность значений — выделившаяся теплота Q

Пункт 2.

4. Энергия до и после. Без внешних сил энергия поля до замыкания ключа сосредоточена в средней щели ($E = \dfrac{q}{S\varepsilon_0}$, $q_1 = 0$), а после — во всех трёх ($q_1 = \frac{q}{5}$):

$$W_{\text{н}} = W(0) = \frac{q^2d}{4S\varepsilon_0}, \qquad W_{\text{к}} = W\left(\frac{q}{5}\right) = \frac{d}{4S\varepsilon_0}\left[\frac{16}{25} + \frac{4}{25}\right]q^2 = \frac{q^2d}{5S\varepsilon_0}.$$

Те же числа через конденсаторы: после равновесия цепь — три последовательных конденсатора с зарядами $\frac{q}{5}$, $\frac{4q}{5}$, $\frac{q}{5}$ и ёмкостями $\frac{S\varepsilon_0}{d}$, $\frac{2S\varepsilon_0}{d}$, $\frac{S\varepsilon_0}{d}$, а $W_{\text{к}} = \dfrac{(q/5)^2}{2C_{\text{в}}} + \dfrac{(4q/5)^2}{2C_{\text{ср}}} + \dfrac{(q/5)^2}{2C_{\text{н}}}$ даёт то же $\dfrac{q^2d}{5S\varepsilon_0}$.



Заряды на поверхностях пластинок (пластинки показаны с толщиной): между поверхностями каждой щели — конденсатор с зарядом на обкладках; три конденсатора соединены последовательно

5. Теплота. Пластинки неподвижны, внешних сил нет, единственный элемент с сопротивлением — резистор, поэтому вся убыль энергии выделяется на нём:

$$Q = W_н - W_к = \frac{q^2 d}{4S\varepsilon_0} - \frac{q^2 d}{5S\varepsilon_0} = \frac{q^2 d}{20\,S\varepsilon_0}.$$

Обратите внимание. В тепло переходит не вся начальная энергия: поле остаётся, внешние пластинки не могут полностью экранировать средние.

Проверка. Размерность: $q^2 d/(S\varepsilon_0)$ — энергия. Для общих зазоров d_1 (средний) и d_2 (внешние) то же условие даёт $q_1 = \dfrac{q\,d_1}{d_1 + 2d_2}$: при $d_2 \to 0$ внешние пластинки экранируют средние, $q_1 \to q$, и в тепло уходит вся начальная энергия; при $d_1 \to 0$ поля в средней щели нет, $q_1 \to 0$, тока нет; при $d_1 = \frac{d}{2}$, $d_2 = d$ получаем $\frac{q}{5}$.

Ответ. 1) к верхней пластинке пройдёт заряд $-\dfrac{q}{5}$ (отрицательный заряд $q/5$); 2) $Q = \dfrac{q^2 d}{20\,S\varepsilon_0}$.