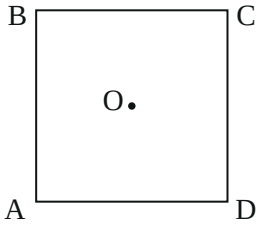
Ускорение вершины квадрата

Задача 5. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Квадратная пластинка ABCD со стороной l движется так, что она всё время остаётся в одной плоскости. Известно, что в некоторый момент времени ускорения вершин A, B и C соответственно равны: $a_A = a$, $a_B = \dfrac{5a}{4}$, $a_C = a$. Найти ускорение вершины D.



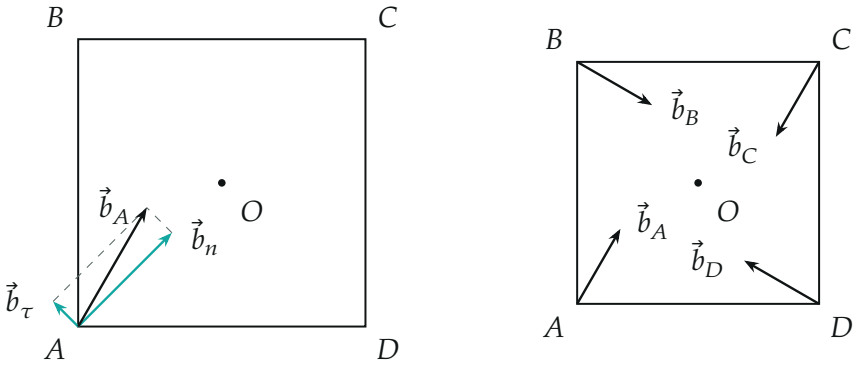
▲ **Решение.** **Что происходит.** Квадрат движется в плоскости как твёрдое тело: его центр O ускоряется, и сам квадрат вращается с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε (оба неизвестны). Ускорение любой точки тела — это ускорение центра плюс ускорение этой точки *относительно центра*. Для вершин квадрата относительные ускорения устроены очень просто: вершины на одном расстоянии от центра, поэтому у всех четырёх относительные ускорения одной длины, а направления повёрнуты на 90°, как и сами вершины. Это даёт два способа: геометрический (векторные суммы) и алгебраический (через сумму квадратов). Задача на ускорения точек твёрдого тела при плоском движении.

Обозначения. $\vec{a}_O$ — ускорение центра O; $\vec{b}_A$, $\vec{b}_B$, $\vec{b}_C$, $\vec{b}_D$ — ускорения вершин относительно центра (в системе отсчёта, которая движется поступательно вместе с центром); $r = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$ — расстояние от центра до вершины.

1. Ускорение вершины в лабораторной системе. Система отсчёта центра движется поступательно с ускорением $\vec{a}_O$ (вращения у неё нет), поэтому скорости, а значит и ускорения складываются:

$$\vec{a}_{\text{вершины}} = \vec{a}_O + \vec{b}_{\text{вершины}}.$$

В системе центра квадрат просто вращается вокруг неподвижной точки O: у каждой вершины есть нормальная составляющая $b_n = \omega^2 r$, направленная к центру, и тангенциальная $b_\tau = \varepsilon r$, перпендикулярная радиусу. Вершины на одном расстоянии r, значит, b_n и b_τ одинаковы у всех четырёх, и их сумма $\vec{b}$ имеет одну и ту же длину $x = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ и одинаково повёрнута относительно радиуса.



Слева: относительное ускорение вершины A — нормальная и тангенциальная составляющие; справа: относительные ускорения четырёх вершин одной длины, повёрнутые на 90° друг к другу

Следовательно (повороту вершин на 90° отвечает поворот ускорений на 90°):

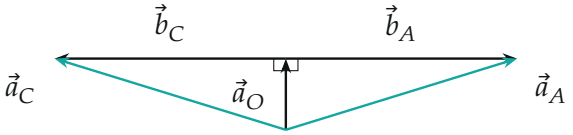
$$\vec{b}_C = -\vec{b}_A, \qquad \vec{b}_D = -\vec{b}_B, \qquad \vec{b}_B \perp \vec{b}_A, \qquad |\vec{b}_A| = |\vec{b}_B| = x.$$

2. Вершины A и C. Запишем ускорения вершин A и C по формуле из пункта 1:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{b}_A, \qquad \vec{a}_C = \vec{a}_O - \vec{b}_A.$$

Модули a_A и a_C равны ($= a$). Сумма и разность двух векторов равны по длине только у перпендикулярных векторов ($|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 4\,\vec{u} \cdot \vec{v}$), поэтому $\vec{a}_O \perp \vec{b}_A$. Тогда по теореме Пифагора

$$a^2 = y^2 + x^2, \qquad y = a_O.$$



Сложение векторов для вершин A и C (длины в масштабе при $a = 3{,}2$ см): $\vec{a}_O \perp \vec{b}_A$, $a_A = a_C$

3. Вершина B. Относительное ускорение $\vec{b}_B$ перпендикулярно $\vec{b}_A$ (пункт 1), как и $\vec{a}_O$ (пункт 2); в плоскости это значит, что $\vec{b}_B \parallel \vec{a}_O$. Векторы либо сонаправлены, либо противонаправлены. Противонаправленные дали бы $a_B = |y - x| \leq \max(x, y) \leq a < \frac{5}{4}a$ — противоречие с условием, значит, они сонаправлены:

$$a_B = y + x = \frac{5}{4}a.$$

4. Решение системы. Возведём $y + x = \frac{5}{4}a$ в квадрат и вычтем $a^2 = x^2 + y^2$:

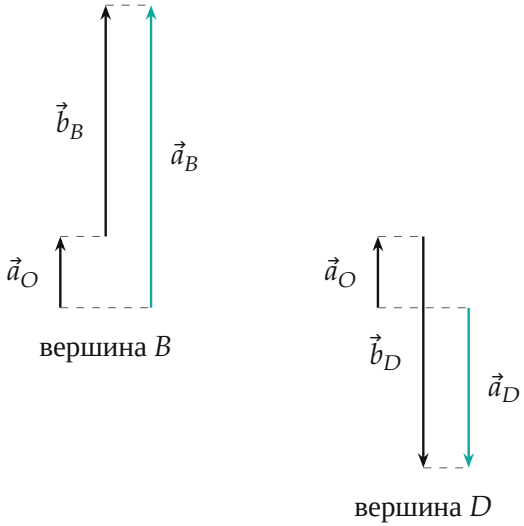
$$2xy = \frac{25}{16}a^2 - a^2 = \frac{9}{16}a^2 \;\Rightarrow\; (x - y)^2 = a^2 - 2xy = \frac{7}{16}a^2.$$

(Отдельно: x и y — корни $2x^2 - \frac{5}{2}ax + \frac{9}{16}a^2 = 0$: $\dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{8}a$.)

5. Вершина D. $\vec{b}_D = -\vec{b}_B$, поэтому $\vec{a}_D = \vec{a}_O - \vec{b}_B$ — векторы $\vec{a}_O$ и $\vec{b}_B$ параллельны, и

$$a_D = |y - x| = \frac{\sqrt{7}}{4}\,a \approx 0{,}66\,a.$$

Результат одинаков для обоих корней: меняется лишь направление $\vec{a}_D$ (вдоль $\vec{b}_B$ или против).



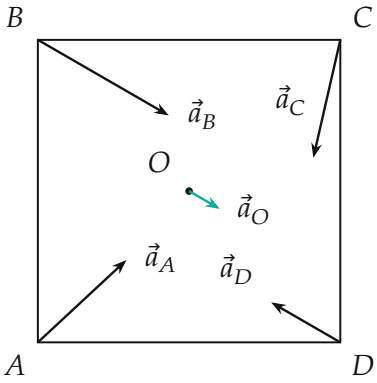
Сложение для вершин B и D (длины в масштабе при $a = 3{,}2$ см): у B длины складываются ($4{,}0$ см $= \frac{5}{4}a$), у D вычитаются ($2{,}1$ см $= \frac{\sqrt{7}}{4}a$)

Второй способ (без разбора направлений). Сумма квадратов ускорений двух противоположных вершин не зависит от выбора пары. Для A и C из пункта 1:

$$a_A^2 + a_C^2 = \left|\vec{a}_O + \vec{b}_A\right|^2 + \left|\vec{a}_O - \vec{b}_A\right|^2 = 2a_O^2 + 2x^2,$$

и так же $a_B^2 + a_D^2 = 2a_O^2 + 2x^2$ (длины b_B и b_D равны x). Приравниваем:

$$a_D^2 = a_A^2 + a_C^2 - a_B^2 = 2a^2 - \frac{25}{16}a^2 = \frac{7}{16}a^2 \;\Rightarrow\; a_D = \frac{\sqrt{7}}{4}\,a.$$



Ускорения вершин в одном из возможных движений (длины в масштабе, $a = 1{,}6$ см): $a_B = \frac{5}{4}a$ самое большое, $a_D \approx 0{,}66\,a$ самое малое

Обратите внимание. Ускорение центра масс и угловые величины неизвестны, и для ответа они не нужны: достаточно того, что у вершин, равноудалённых от центра, относительные ускорения одной длины и повёрнуты вместе с вершинами.

Проверка. Размерность: $a_D \propto a$. Предельный случай: если все четыре ускорения равны a (центр неподвижен, вращение с постоянной угловой скоростью), то из $a_D^2 = a_A^2 + a_C^2 - a_B^2$ получаем $a_D = a$ — верно. Другой случай: при $a_B = \sqrt{2}a$ получаем $a_D = 0$ — вершина D в этот момент неподвижна, что возможно (мгновенный центр ускорений в D). Численная проверка: для $\omega^2 \approx 1{,}31\,a/l$, $\varepsilon \approx -0{,}35\,a/l$ и $\vec{a}_O$ вдоль $\vec{b}_B$ длины $0{,}29\,a$ формула ускорения твёрдого тела даёт $a_A = a_C = a$, $a_B = 1{,}25\,a$, $a_D = 0{,}661\,a$.

Ответ. $a_D = \dfrac{\sqrt{7}}{4}\,a \approx 0{,}66\,a$.