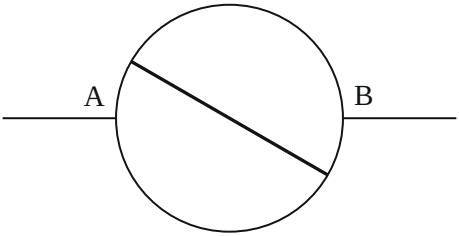
Кольцо с перемычкой

Задача 2. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Из проволоки сопротивлением $2R = 2$ Ом сделали кольцо и включили его в электрическую сеть напряжением $U = 10$ В между точками A и B, лежащими на противоположных концах одного диаметра. Перемычку с пренебрежимо малым сопротивлением положили на кольцо так, что перемычка касается кольца в двух противоположных концах одного диаметра, и в этих точках существует электрический контакт между кольцом и перемычкой (см. рис.). Какой максимальной мощности, выделяемой на участке AB, можно добиться, поворачивая перемычку? Под каким углом к прямой AB её следует в этом случае расположить? Проволока кольца и перемычка выдерживают максимальный ток $I_0 = 20$ А. Напряжение сети не зависит от сопротивления нагрузки.



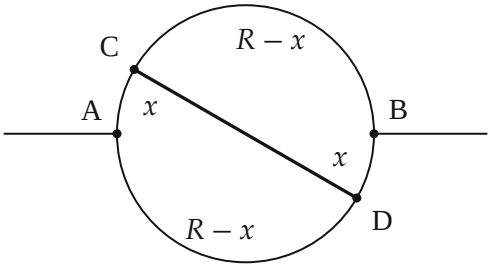
1. Какой максимальной мощности, выделяемой на участке AB, можно добиться?
2. Под каким углом к прямой AB следует расположить перемычку?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на предельный режим: мощность $P = U^2/R_{\text{об}}$ тем больше, чем меньше сопротивление цепи, но по проволоке нельзя пропускать ток больше I_0. Перемычка с нулевым сопротивлением соединяет две точки кольца в один узел, поэтому цепь превращается в симметричную схему из двух пар параллельных дуг; нужно найти положение перемычки, при котором самый большой ток в кольце как раз равен I_0.

Обозначения. Сопротивление полукольца $R = 1$ Ом (проволока однородная, сопротивление пропорционально длине дуги); C и D — точки

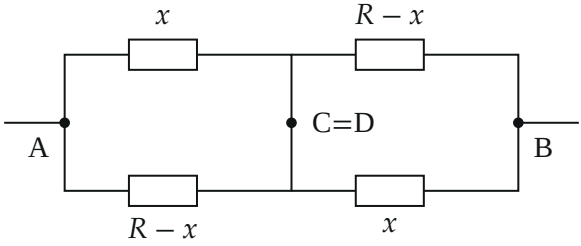
касания перемычки; x — сопротивление дуги AC; $R_{об}$ — сопротивление всей цепи между A и B.

1. Сопротивления дуг. Перемычка — диаметр, поэтому C и D симметричны относительно центра кольца: поворот на 180° вокруг центра переводит A в B, а C в D. Значит, дуга BD равна дуге AC (сопротивление x), а дуги CB и AD равны друг другу: каждая — половина кольца без дуги AC, т. е. $R - x$.



Дуги кольца: каждая половина кольца (между A и B) делится точками C и D на участки x и $R - x$

2. Эквивалентная схема. Сопротивление перемычки нулевое, поэтому потенциалы C и D одинаковы: это один узел M. От A до M идут две дуги параллельно — AC и AD; от M до B тоже две — CB и DB. Нарисуем схему.



Эквивалентная схема: перемычка стягивает C и D в один узел, цепь распалась на две пары параллельных дуг

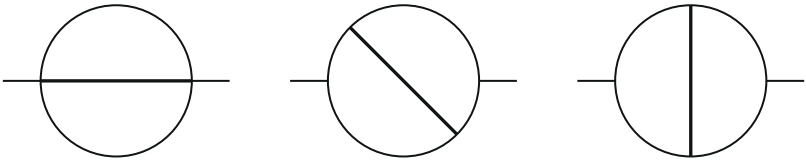
3. Сопротивление цепи. Две параллельные дуги от A до M:

$$R_{AM} = \frac{x(R-x)}{x+(R-x)} = \frac{x(R-x)}{R},$$

от M до B — то же. Участки идут последовательно:

$$R_{\text{об}} = 2R_{AM} = \frac{2x(R-x)}{R}.$$

Качественно: если перемычка лежит вдоль AB ($x = 0$), она закорачивает цепь и $R_{\text{об}} = 0$; если перпендикулярна AB ($x = R/2$), цепь симметрична и $R_{\text{об}} = \dfrac{2 \cdot (R/2)^2}{R} = \dfrac{R}{2}$ — наибольшее значение. Чем ближе перемычка к AB, тем меньше сопротивление и тем больше мощность.



$x = 0$, $R_{\text{об}} = 0$ | $x = R/4$, $R_{\text{об}} = \frac{3}{8}R$ | $x = R/2$, $R_{\text{об}} = \frac{1}{2}R$

Три положения перемычки и сопротивление цепи

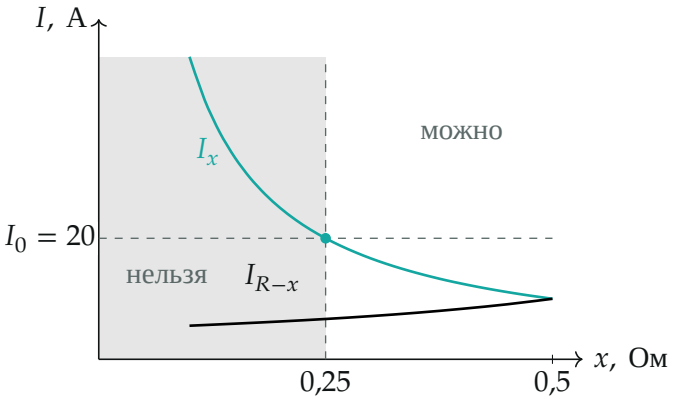
4. Токи в дугах. Участки A–M и M–B одинаковы по сопротивлению, поэтому напряжение U делится пополам: на каждой паре дуг $U/2$. Закон Ома для дуг:

$$I_x = \frac{U}{2x} \text{ (дуги AC и DB)}, \qquad I_{R-x} = \frac{U}{2(R-x)} \text{ (дуги AD и CB)}.$$

Ток перемычки найдём из закона сохранения заряда в узле C: в него входит I_x по дуге AC, выходит I_{R-x} по дуге CB, остальное уходит по перемычке:

$$I_{\text{пер}} = |I_x - I_{R-x}| < \max(I_x, I_{R-x}).$$

Значит, ограничение по току задаёт самая нагруженная дуга кольца, а не перемычка. Положим $x \le R/2$ (положение с $x > R/2$ — зеркальное). Тогда $x \le R - x$, и самый большой ток течёт в дугах с сопротивлением x: $I_x \ge I_{R-x}$.



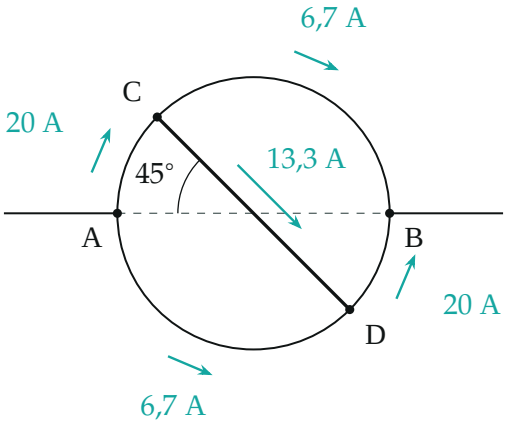
Токи в дугах кольца при $U = 10$ В, $R = 1$ Ом: левее $x = 0{,}25$ Ом ток в дугах I_x превышает I_0

5. Условие предела. Мощность $P = U^2/R_{\text{об}} = \dfrac{U^2 R}{2x(R-x)}$ при $x < R/2$ растёт с уменьшением x (знаменатель растёт с ростом x). Значит, нужно взять наименьшее допустимое x, т. е. то, при котором $I_x = I_0$:

$$\frac{U}{2x} = I_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{U}{2I_0} = \frac{10}{2 \cdot 20} = 0{,}25 \text{ Ом}.$$

При меньшем x ток в дугах AC и DB превысит I_0, и проволока не выдержит.

6. Угол перемычки. Сопротивление дуги пропорционально её длине. Полукольцу (дуга 180°) соответствует $R = 1$ Ом, дуге AC — $x = 0{,}25$ Ом, т. е. четверть: центральный угол дуги AC равен $180°/4 = 45°$. Перемычка — диаметр, проходящий через C, а C видна из центра под углом 45° к направлению на A. Поэтому перемычка составляет с прямой AB угол 45°.



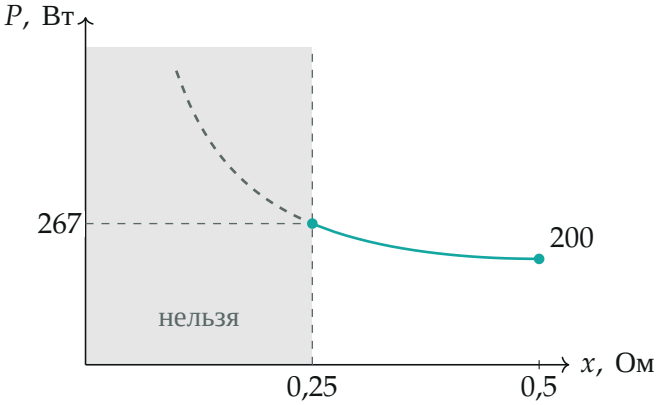
Предельное положение: перемычка под 45° к AB; токи в дугах (в перемычке течёт 13,3 А от C к D)

7. Сопротивление и мощность. При $x = R/4$ (так как $x = 0{,}25R$ при $R = 1$ Ом)

$$R_{\text{об}} = \frac{2x(R-x)}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}{1}\ \text{Ом} = 0{,}375\ \text{Ом} = \frac{3}{8}R,$$

$$P_{\max} = \frac{U^2}{R_{\text{об}}} = \frac{100}{0{,}375}\ \text{Вт} \approx 267\ \text{Вт}.$$

Остальные токи в этом положении: $I_{R-x} = \dfrac{U}{2 \cdot 0{,}75} \approx 6{,}7$ А, ток перемычки $I_{\text{пер}} = 20 - 6{,}7 \approx 13{,}3\ \text{А} < I_0$.



Мощность при $U = 10$ В, $R = 1$ Ом: растёт при уменьшении x, но левее $x = 0{,}25$ Ом проволока не выдержит

Мощность сошлась с током сети: $I = U/R_{\text{об}} \approx 26{,}7$ А $= I_x + I_{R-x}$, $P = UI \approx 267$ Вт.

Обратите внимание: ограничение I_0 относится к проволоке кольца и перемычке, а ток, текущий из сети, 26,7 А, больше I_0 — он делится между двумя ветвями кольца, и в каждой дуге остаётся не больше I_0.

Проверка. Размерность: $U^2/R_{\text{об}}$ — ватты. Второй способ: сумма I^2R по всем участкам (закон Джоуля — Ленца): $2 \cdot 20^2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 6{,}7^2 \cdot 0{,}75 \approx 200 + 67 = 267$ Вт, перемычка не греется. Предел: при $x = R/2$ перемычка перпендикулярна AB, её концы эквипотенциальны, ток по ней не течёт, и мощность такая же, как без перемычки: две полуокружности по R параллельно дают $R/2$, $P = U^2/(R/2) = 200$ Вт (правая точка на графике). Предельное положение даёт 267 Вт — в $4/3$ раза больше. Физический смысл: ограничивает не напряжение, а нагрев проволоки.

Ответ. 1) $P_{\max} = \dfrac{8U^2}{3R} \approx 267$ Вт; 2) перемычку следует расположить под углом 45° к прямой AB (или, зеркально, 135°).