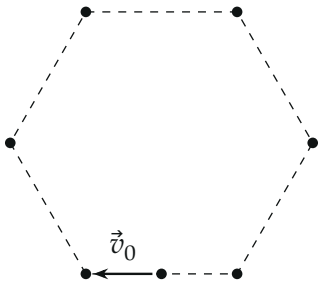
Семь шайб на шестиугольнике

Задача 3. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Шесть одинаковых гладких маленьких шайб расположены на гладкой горизонтальной плоскости в вершинах правильного шестиугольника со стороной a. Седьмая точно такая же шайба находится посередине одной из сторон шестиугольника. Седьмой шайбе сообщают такую скорость $\vec{v}_0$ в направлении одной из вершин (см. рис.), что она последовательно сталкивается со всеми «вершинными» шайбами. Какую скорость будет иметь эта шайба после шестого столкновения? Через какое время после первого столкновения произойдёт шестое? Все столкновения шайб абсолютно упругие. Трение отсутствует.



1. Какую скорость будет иметь шайба после шестого столкновения?
2. Через какое время после первого столкновения произойдёт шестое?

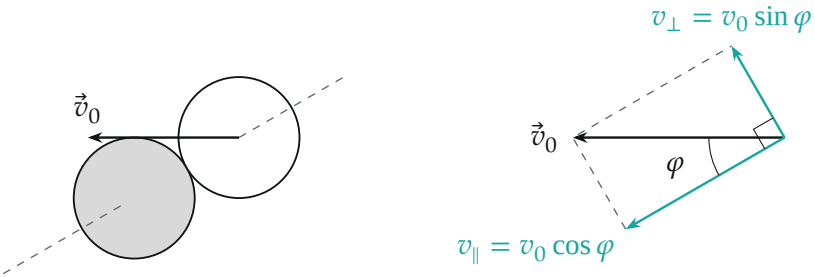
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на нецентральный упругий удар одинаковых гладких шайб, повторённый шесть раз. Гладкие шайбы действуют друг на друга только вдоль линии центров, поэтому составляющая скорости налетающей шайбы поперёк этой линии не меняется, а вдоль неё шайбы обмениваются скоростями. Чтобы шайба ударила следующую вершину, после каждого удара она должна повернуть на 60° — на угол, под которым меняется направление сторон шестиугольника; это однозначно определяет угол удара и уменьшение скорости при каждом ударе в одно и то же число раз. Дальше остаётся геометрическая прогрессия.

Обозначения. Налетающую шайбу назовём битком; вершинные шайбы нумеруем в порядке ударов V_1, …, V_6 (по ходу часовой стрелки, см. рисунок ниже); v_k — скорость битка после k-го удара (v_0 — до первого); φ — угол между скоростью битка и линией центров в момент удара; u_k — скорость вершинной шайбы V_k после удара. Размеры шайб считаем малыми по сравнению с a, а путь между соседними ударами — равным a.

1. Что происходит при одном ударе. Рассмотрим удар битка о покоящуюся шайбу. Линию центров в момент удара назовём осью ∥, перпендикулярное ей направление — осью ⊥. Шайбы гладкие, поэтому сила взаимодействия направлена по линии центров, и проекция второго закона Ньютона на ось ⊥ даёт $m\,dv_\perp/dt = 0$: поперечная составляющая скорости битка не меняется,

$$v'_\perp = v_\perp = v\sin\varphi.$$

Вдоль оси ∥ идёт обычный лобовой упругий удар шайб одинаковой массы: из законов сохранения импульса и энергии $v_\parallel = v'_\parallel + u$, $v_\parallel^2 = v_\parallel'^2 + u^2$ следует $v'_\parallel = 0$, $u = v_\parallel = v\cos\varphi$ — шайбы обмениваются скоростями. Итог: после удара биток движется со скоростью $v\sin\varphi$ перпендикулярно линии центров, а вершинная шайба уходит вдоль линии центров со скоростью $v\cos\varphi$.



Слева: момент удара — светлая шайба налетает, штрих — линия центров. Справа: скорость битка раскладывается на составляющую вдоль линии центров и поперечную (угол φ между $\vec{v}_0$ и линией центров)

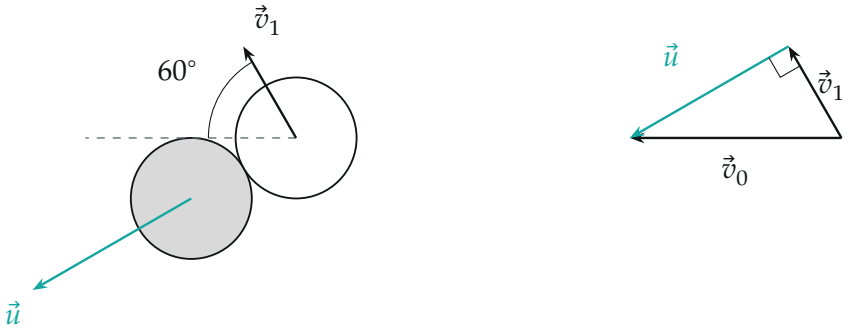
2. Второй способ: векторный. Для тех же шайб импульс $m\vec{v} = m\vec{v}' + m\vec{u}$ и энергия $v^2 = v'^2 + u^2$ сохраняются. Первое равенство — треугольник векторов $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$, второе — теорема Пифагора для него: треугольник прямоугольный, а значит $\vec{v}' \perp \vec{u}$. После удара шайбы разлетаются под прямым углом: биток — перпендикулярно линии центров (по которой ушла вторая шайба), с катетом $v' = v \sin\varphi$.

3. Нужный поворот и угол удара. Скорость битка после удара перпендикулярна линии центров, а до удара составляла с ней угол φ; значит, вектор скорости повернулся на $90° - \varphi$. Чтобы биток после удара о вершину прошёл по стороне шестиугольника к следующей вершине, он должен повернуть на внешний угол шестиугольника, 60°:

$$90° - \varphi = 60° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30°.$$

Тогда скорость битка после первого удара

$$v_1 = v_0 \sin 30° = \frac{v_0}{2}.$$



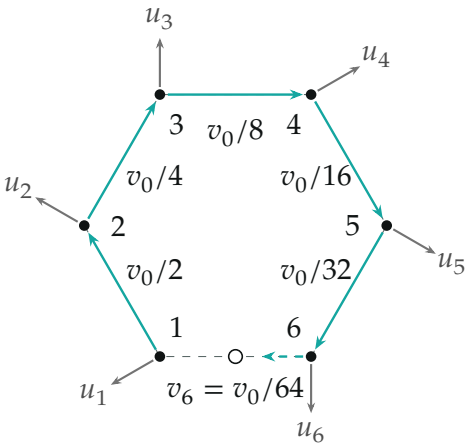
Слева: после удара биток (светлая шайба) повернул на 60°, вершинная шайба ушла вдоль линии центров. Справа: те же скорости в виде треугольника $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{u}$ с прямым углом

4. Все шесть ударов одинаковы. Каждый следующий удар отличается от первого поворотом всей картины на 60° и меньшей скоростью

битка, а углы те же: шайбы-мишени стоят в вершинах правильного шестиугольника, биток идёт по сторонам и поворачивает на 60°. Значит, на каждом ударе $\varphi = 30°$ и $v_k = v_{k-1}\sin 30° = v_{k-1}/2$:

$$v_k = \frac{v_0}{2^k}, \qquad v_6 = \frac{v_0}{2^6} = \frac{v_0}{64}.$$

Вершинные шайбы после своего удара уходят наружу (вдоль линий центров, от шестиугольника) со скоростью $u_k = v_{k-1}\cos 30°$ и больше битку не мешают; ещё не задетые шайбы покоятся.



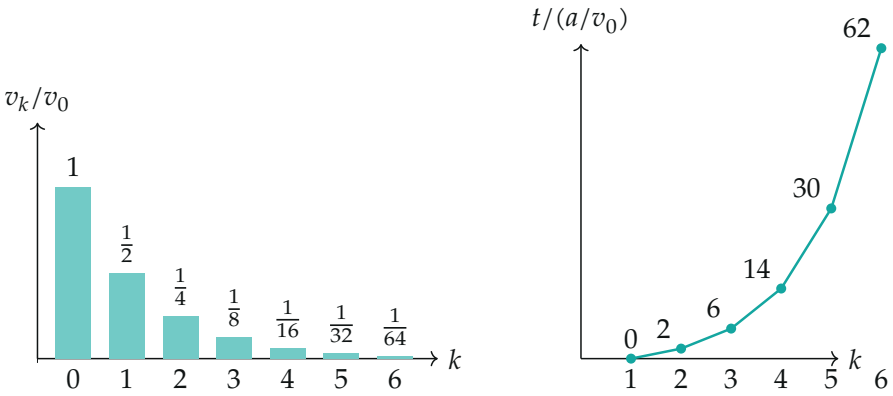
Путь битка по шестиугольнику; у сторон — скорости на каждом участке, у вершин — номера ударов, серые стрелки — скорости вершинных шайб после удара

5. Время. Биток проходит между соседними ударами расстояние a с постоянной скоростью v_k (трения нет), поэтому

$$t_{k,k+1} = \frac{a}{v_k} = \frac{2^k a}{v_0}, \qquad k = 1, \ldots, 5.$$

Время от первого удара до шестого — сумма пяти участков (геометрическая прогрессия со знаменателем 2):

$$t = \frac{a}{v_0}(2 + 4 + 8 + 16 + 32) = \frac{a}{v_0} \cdot 2\,(2^5 - 1) = \frac{62\,a}{v_0}.$$



Слева: скорость битка после k-го удара вдвое меньше предыдущей. Справа: время, прошедшее с первого удара до k-го, в единицах a/v_0

Проверка. Размерность: a/v_0 — секунды. Энергия: каждой вершинной шайбе уходит $u_k^2 = \frac{3}{4}v_{k-1}^2$ (в долях $mv_0^2/2$ это $\frac{3}{4}\cdot 4^{1-k}$), и по сумме

$$\sum_{k=1}^{6} u_k^2 + v_6^2 = \frac{3}{4}v_0^2\left(1 + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{4^5}\right) + \frac{v_0^2}{4^6} = v_0^2\left(1 - \frac{1}{4^6}\right) + \frac{v_0^2}{4^6} = v_0^2,$$

т. е. энергия сохраняется — удары действительно упругие, и почти вся энергия уходит шести вершинным шайбам. Физический смысл: каждый удар передаёт вершинной шайбе три четверти энергии, биток теряет скорость вдвое, и чем дольше он идёт, тем медленнее — поэтому время растёт как 2^k.

Ответ. 1) $v_6 = \dfrac{v_0}{64}$; 2) $t = \dfrac{62\,a}{v_0}$.