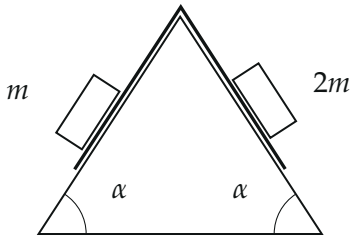
Лента на призме с брусками

Задача 4. [Росатом 2023/24, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Через вершину гладкой закреплённой равнобедренной призмы с углами при основании α переброшена невесомая нерастяжимая лента, на которую поставлены два бруска массой m и $2m$. Коэффициенты трения между брусками и лентой одинаковы и равны μ, между лентой и призмой трения нет. Найти ускорение ленты.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение связанных тел с трением, и главное в ней — слово «невесомая». Сумма сил, действующих вдоль невесомой ленты, равна нулю (иначе у ленты было бы бесконечное ускорение), поэтому два бруска действуют на ленту одинаковыми силами трения. У лёгкого бруска предел трения меньше, так что тяжёлый брусок от ленты не отстаёт, и остаётся один вопрос: удерживает ли лента лёгкий брусок или он проскальзывает. Ответ зависит от μ, и решение распадается на два случая.

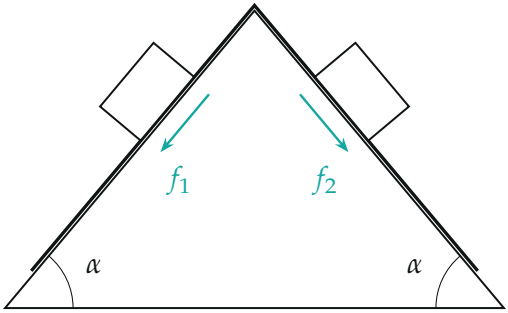
Обозначения. Ускорение ленты a — по модулю; лента движется так, что тяжёлый брусок едет вниз по своему склону, а лёгкий — вверх по своему (призма гладкая, и лента скользит по ней свободно, а разность проекций сил тяжести $2mg\sin\alpha - mg\sin\alpha > 0$ не уравновешена: стоять на месте система не может). f_1, f_2 — модули сил трения между лентой и лёгким, тяжёлым бруском; нормальные силы реакции $N_1 = mg\cos\alpha$ и $N_2 = 2mg\cos\alpha$ (вдоль нормали к склону бруски не движутся, и в этом проекция второго закона Ньютона даёт ноль).

1. Силы трения на ленту равны. Вдоль ленты на неё действуют только силы трения от брусков (призма гладкая, её реакция перпендикулярна ленте; тяжести у ленты нет). Лента невесома, поэтому по второму

закону Ньютона для ленты в проекции на её направление

$$f_2 - f_1 = m_{\text{ленты}}\, a = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2 = f.$$

Каждая сила трения со стороны бруска на ленту направлена вниз по склону этого бруска, т. е. в разные стороны вдоль ленты, и они уравновешивают друг друга. По третьему закону Ньютона на каждый брусок со стороны ленты действует сила трения той же величины f, направленная вверх по склону.



Силы, действующие на ленту вдоль неё: трение от лёгкого и тяжёлого брусков (внутри призмы нарисованы вплотную к ленте); сумма равна нулю, значит $f_1 = f_2$

2. Какой брусок может проскальзывать. Максимальная сила трения покоя и сила трения скольжения равны μN: у лёгкого $\mu mg\cos\alpha$, у тяжёлого $2\mu mg\cos\alpha$. Если бы проскальзывали оба, было бы $f_1 = \mu mg\cos\alpha \neq f_2 = 2\mu mg\cos\alpha$ — противоречие пункту 1. Если бы скользил тяжёлый, а лёгкий покоился, то $f_2 = 2\mu mg\cos\alpha$, а $f_1 \leq \mu mg\cos\alpha$ — опять $f_1 \neq f_2$. Значит, тяжёлый брусок неподвижен относительно ленты всегда, а лёгкий либо неподвижен, либо скользит: два случая.

3. Случай А: оба бруска неподвижны относительно ленты. Лента и бруски движутся с одним ускорением a (лента нерастяжима). Запишем второй закон Ньютона для каждого бруска в проекции на ось вдоль его склона, направленную по ускорению: для тяжёлого (ускорение вниз по

склону) и для лёгкого (вверх):

$$2m\,a = 2mg\sin\alpha - f, \qquad m\,a = f - mg\sin\alpha.$$

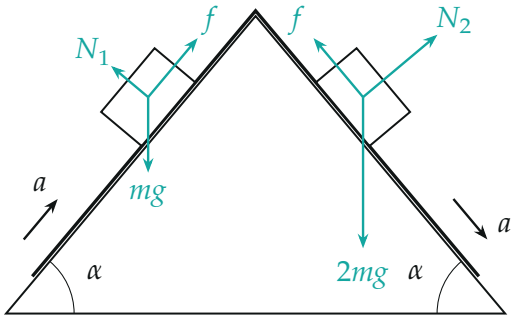
Сложим уравнения: f уходит, и остаётся $3m\,a = mg\sin\alpha$, откуда

$$a = \frac{g\sin\alpha}{3}.$$

Движение направлено в сторону тяжёлого бруска. Из второго уравнения находим силу трения: $f = m(a + g\sin\alpha) = \frac{4}{3}mg\sin\alpha$. Лёгкий брусок не проскальзывает, если эта сила не больше предельной: $f \le \mu mg\cos\alpha$, т. е.

$$\frac{4}{3}mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

У тяжёлого запас: ему нужно то же f, а предел вдвое больше.



Случай А ($\mu \ge \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$): силы на бруски; $f = \frac{4}{3}mg\sin\alpha$, ускорение $a = \frac{1}{3}g\sin\alpha$ — вверх у лёгкого и вниз у тяжёлого

4. Случай Б: лёгкий брусок скользит. Тогда на него действует сила трения скольжения $f = \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha$, и по пункту 1 такая же сила действует на тяжёлый брусок. Он неподвижен относительно ленты и движется с ускорением ленты a:

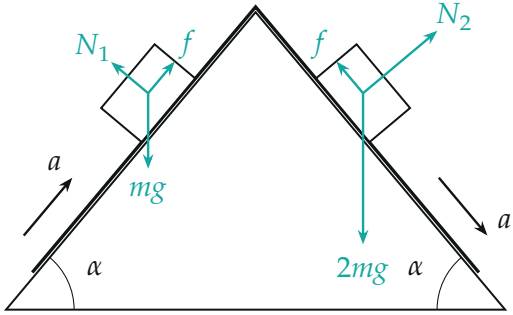
$$2m\,a = 2mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a = g\left(\sin\alpha - \frac{\mu}{2}\cos\alpha\right).$$

Проверим, что лёгкий брусок действительно скользит, вторым способом — через ускорения. Ускорение лёгкого бруска вверх по склону $a_1 = f/m - g\sin\alpha = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$; лента едет вверх по этому склону с ускорением a. Скольжение — это $a > a_1$ (лента уезжает от бруска):

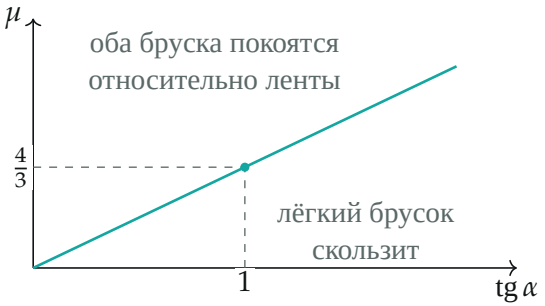
$$g\left(\sin\alpha - \frac{\mu}{2}\cos\alpha\right) > g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad 2\sin\alpha > \frac{3}{2}\mu\cos\alpha,$$

$$\mu < \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

то же условие границы, только с другой стороны: случаи А и Б не пересекаются и вместе покрывают все μ.

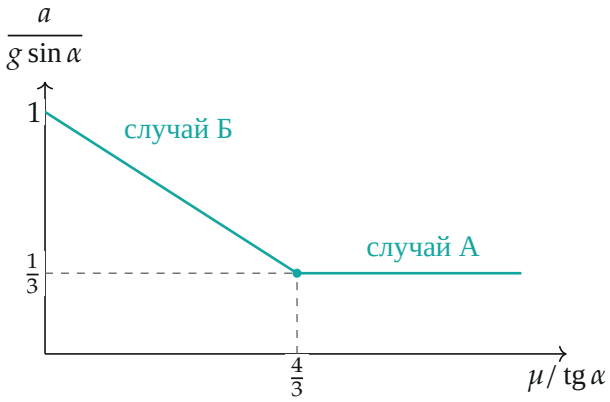


Случай Б ($\mu < \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$): лёгкий брусок скользит по ленте, $f = \mu mg\cos\alpha$ у обоих брусков; ускорение ленты задаёт тяжёлый брусок



Какой случай реализуется при заданных α и μ: граница $\mu = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$

5. Ускорение как функция μ. Объединим случаи. Удобно отложить $\mu/\operatorname{tg}\alpha$: тогда $a/(g\sin\alpha) = 1 - \dfrac{\mu}{2\operatorname{tg}\alpha}$ при $\mu/\operatorname{tg}\alpha \le \dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{1}{3}$ дальше. Чем больше трение, тем меньше ускорение, но не меньше $\frac{1}{3}g\sin\alpha$.



Ускорение ленты: линейно убывает от $g\sin\alpha$ (трения нет) до $\frac{1}{3}g\sin\alpha$ и дальше не меняется

Обратите внимание: вторая формула верна только до $\mu = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$. Подставив в неё большие μ, мы получили бы ускорение меньше $\frac{1}{3}g\sin\alpha$ и даже отрицательное — этого быть не может, потому что тогда лёгкий брусок уже не скользит.

Проверка. Размерность: $g\sin\alpha$ — ускорение. Предел $\mu \to \infty$: бруски скреплены с лентой, ускорение $\dfrac{(2m-m)g\sin\alpha}{3m} = \dfrac{1}{3}g\sin\alpha$ — совпало со случаем А. Предел $\mu = 0$: трения нет, лента ничем не тормозит тяжёлый брусок, и его ускорение $g\sin\alpha$ — совпало со случаем Б. На границе $\mu = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$ оба ответа дают $\frac{1}{3}g\sin\alpha$, так что ускорение меняется непрерывно. Физический смысл: лёгкий брусок либо едет с лентой, либо передаёт ей только $\mu mg\cos\alpha$.

Ответ. $a = \dfrac{g\sin\alpha}{3}$ при $\mu \ge \dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$ (оба бруска покоятся относительно ленты); $a = g\left(\sin\alpha - \dfrac{\mu}{2}\cos\alpha\right)$ при $\mu \le \dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$ (лёгкий брусок скользит, тяжёлый покоится относительно ленты).